

Równania obserwacyjne w sieciach wysokościowych

P_i



P_j



Równania obserwacyjne w sieciach wysokościowych



Równania obserwacyjne w sieciach wysokościowych



$$h_{ij} = H_j - H_i \quad (1)$$

Równania obserwacyjne w sieciach wysokościowych



$$h_{ij}^{ob} + v_{ij} = H_j - H_i \quad (1)$$

Równania obserwacyjne w sieciach wysokościowych



$$h_{ij}^{ob} + v_{ij} = H_j - H_i \quad (1)$$

$$v_{ij} = H_j - H_i - h_{ij} \quad (2)$$

Równania obserwacyjne w sieciach wysokościowych



$$h_{ij}^{ob} + v_{ij} = H_j - H_i \quad (1)$$

$$v_{ij} = H_j - H_i - h_{ij} \quad (2)$$

Metoda pośrednicząca — rzędne reperów w wektorze niewiadomych to niewiadome pośredniczące

Równania obserwacyjne w sieciach wysokościowych



$$h_{ij}^{ob} + v_{ij} = H_j - H_i \quad (1)$$

$$v_{ij} = H_j - H_i - h_{ij} \quad (2)$$

Czasem w sieciach niwelacyjnych przyjmują się przybliżone wartości rzędnych reperów (H^0):

$$H_i = H_i^0 + dH_i$$

$$H_j = H_j^0 + dH_j$$

Równania obserwacyjne w sieciach wysokościowych



$$h_{ij}^{ob} + v_{ij} = H_j - H_i \quad (1)$$

$$v_{ij} = H_j - H_i - h_{ij} \quad (2)$$

Czasem w sieciach niwelacyjnych przyjmują się przybliżone wartości rzędnych reperów (H^0):

$$H_i = H_i^0 + dH_i$$

$$H_j = H_j^0 + dH_j$$

Wtedy równanie poprawek przyjmuje postać

$$v_{ij} = dH_j - dH_i + H_j^0 - H_i^0 - h_{ij}$$

Równania obserwacyjne w sieciach wysokościowych



$$h_{ij}^{ob} + v_{ij} = H_j - H_i \quad (1)$$

$$v_{ij} = H_j - H_i - h_{ij} \quad (2)$$

Czasem w sieciach niwelacyjnych przyjmują się przybliżone wartości rzędnych reperów (H^0):

$$H_i = H_i^0 + dH_i$$

$$H_j = H_j^0 + dH_j$$

Wtedy równanie poprawek przyjmuje postać

$$v_{ij} = dH_j - dH_i + \underbrace{H_j^0 - H_i^0}_{l_{ij}} - h_{ij} \quad (3)$$

Równania obserwacyjne w sieciach wysokościowych



$$h_{ij}^{ob} + v_{ij} = H_j - H_i \quad (1)$$

$$v_{ij} = H_j - H_i - h_{ij} \quad (2)$$

Czasem w sieciach niwelacyjnych przyjmują się przybliżone wartości rzędnych reperów (H^0):

$$H_i = H_i^0 + dH_i$$

$$H_j = H_j^0 + dH_j$$

Wtedy równanie poprawek przyjmuje postać

$$v_{ij} = dH_i - dH_j + H_i^0 - H_j^0 - h_{ij} \quad (3)$$

niewiadomymi nie są rzędne reperów, tylko przyrosty do przybliżonych wartości wysokości reperów

Równania obserwacyjne w sieciach wysokościowych



$$h_{ij}^{ob} + v_{ij} = H_j - H_i \quad (1)$$

$$v_{ij} = H_j - H_i - h_{ij} \quad (2)$$

Czasem w sieciach niwelacyjnych przyjmują się przybliżone wartości rzędnych reperów (H^0):

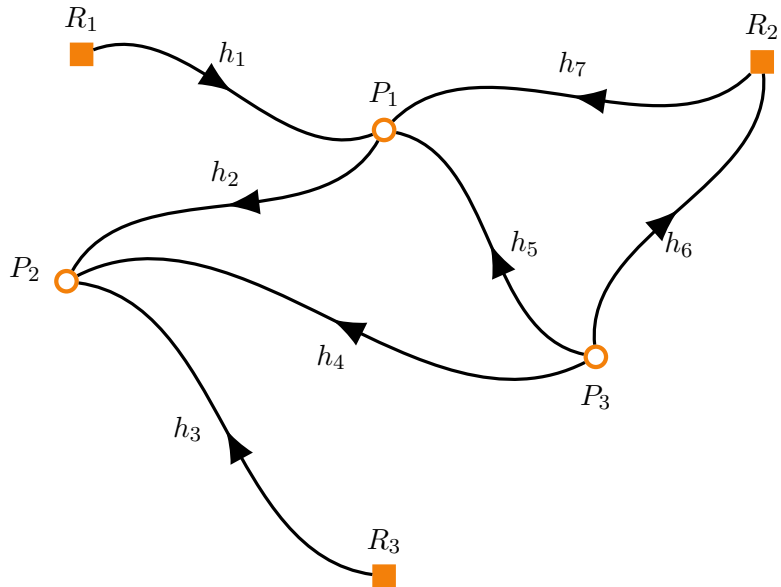
$$H_i = H_i^0 + dH_i$$

$$H_j = H_j^0 + dH_j$$

Wtedy równanie poprawek przyjmuje postać

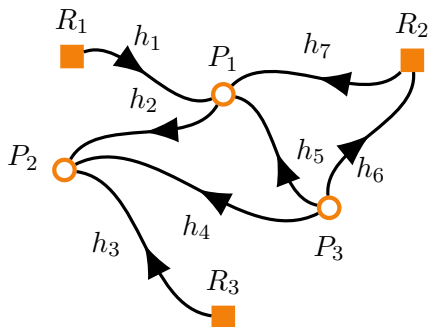
Wprowadzenie współrzędnych przybliżonych w sieciach niwelacyjnych wynika bardziej z tradycji geodezyjnej, czy analogii do innych zadań wyrównawczych, niż z rzeczywistej matematycznej potrzeby

Przykład ułożenia równań poprawek



Przykład ułożenia równań poprawek

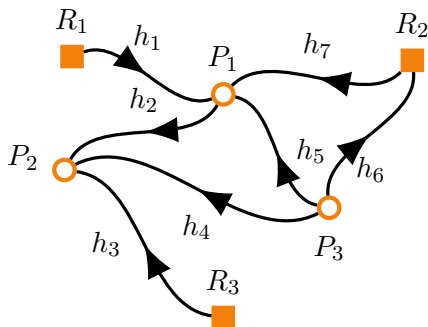
$$h_1^{ob} + v_1 = H_1 - H_{R_1}$$



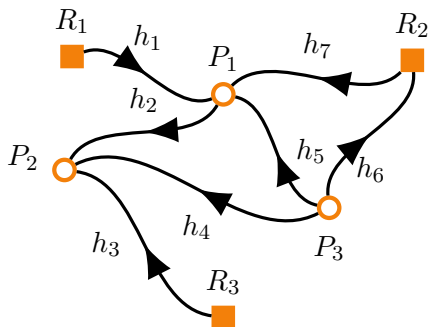
Przykład ułożenia równań poprawek

$$h_1^{ob} + v_1 = H_1 - H_{R_1}$$

$$h_2^{ob} + v_2 = H_2 - H_1$$



Przykład ułożenia równań poprawek

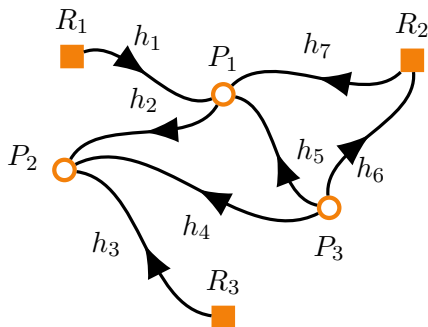


$$h_1^{ob} + v_1 = H_1 - H_{R_1}$$

$$h_2^{ob} + v_2 = H_2 - H_1$$

$$h_3^{ob} + v_3 = H_2 - H_{R_3}$$

Przykład ułożenia równań poprawek



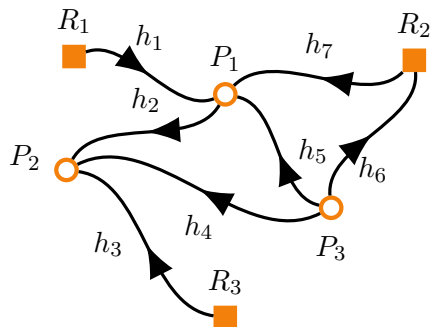
$$h_1^{ob} + v_1 = H_1 - H_{R_1}$$

$$h_2^{ob} + v_2 = H_2 - H_1$$

$$h_3^{ob} + v_3 = H_2 - H_{R_3}$$

$$h_4^{ob} + v_4 = H_2 - H_3$$

Przykład ułożenia równań poprawek



$$h_1^{ob} + v_1 = H_1 - H_{R_1}$$

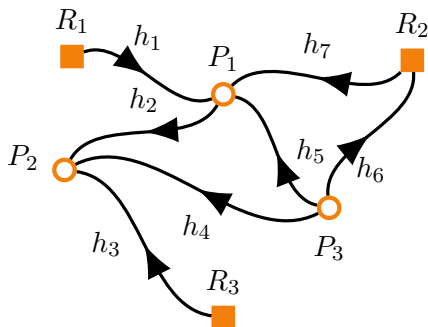
$$h_2^{ob} + v_2 = H_2 - H_1$$

$$h_3^{ob} + v_3 = H_2 - H_{R_3}$$

$$h_4^{ob} + v_4 = H_2 - H_3$$

$$h_5^{ob} + v_5 = H_1 - H_3$$

Przykład ułożenia równań poprawek



$$h_1^{ob} + v_1 = H_1 - H_{R_1}$$

$$h_2^{ob} + v_2 = H_2 - H_1$$

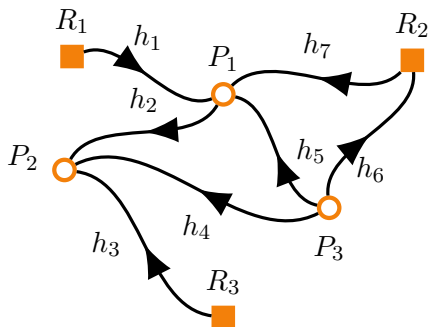
$$h_3^{ob} + v_3 = H_2 - H_{R_3}$$

$$h_4^{ob} + v_4 = H_2 - H_3$$

$$h_5^{ob} + v_5 = H_1 - H_3$$

$$h_6^{ob} + v_6 = H_{R_2} - H_3$$

Przykład ułożenia równań poprawek



$$h_1^{ob} + v_1 = H_1 - H_{R_1}$$

$$h_2^{ob} + v_2 = H_2 - H_1$$

$$h_3^{ob} + v_3 = H_2 - H_{R_3}$$

$$h_4^{ob} + v_4 = H_2 - H_3$$

$$h_5^{ob} + v_5 = H_1 - H_3$$

$$h_6^{ob} + v_6 = H_{R_2} - H_3$$

$$h_7^{ob} + v_7 = H_1 - H_{R_2}$$

Przykład ułożenia równań poprawek

$$\begin{aligned}v_1 &= H_1 && -H_{R_1} && -h_1^{ob} \\v_2 &= -H_1 &+ H_2 && && -h_2^{ob} \\v_3 &= && H_2 && -H_{R_3} && -h_3^{ob} \\v_4 &= && H_2 &- H_3 && && -h_4^{ob} \\v_5 &= H_1 && &- H_3 && && -h_5^{ob} \\v_6 &= && &- H_3 &+ H_{R_2} && && -h_6^{ob} \\v_7 &= H_1 && && &- H_{R_1} && && -h_7^{ob}\end{aligned}$$

Przykład ułożenia równań poprawek

V		$A \cdot X$		L
v_1	=	H_1		$-H_{R_1} \quad -h_1^{ob}$
v_2	=	$-H_1 \quad +H_2$		$-h_2^{ob}$
v_3	=	H_2		$-H_{R_3} \quad -h_3^{ob}$
v_4	=	$H_2 \quad -H_3$		$-h_4^{ob}$
v_5	=	$H_1 \quad -H_3$		$-h_5^{ob}$
v_6	=	$-H_3$	$+H_{R_2}$	$-h_6^{ob}$
v_7	=	H_1	$-H_{R_1}$	$-h_7^{ob}$

Przykład ułożenia równań poprawek

V		$A \cdot X$		L		
v_1	=	$+1 \cdot H_1$		$-H_{R_1}$	$-h_1^{ob}$	
v_2	=	$-1 \cdot H_1$	$+1 \cdot H_2$		$-h_2^{ob}$	
v_3	=		$+1 \cdot H_2$	$-H_{R_3}$	$-h_3^{ob}$	
v_4	=		$+1 \cdot H_2$	$-1 \cdot H_3$	$-h_4^{ob}$	
v_5	=	$+1 \cdot H_1$		$-1 \cdot H_3$	$-h_5^{ob}$	
v_6	=			$-1 \cdot H_3$	$+H_{R_2}$	$-h_6^{ob}$
v_7	=	$+1 \cdot H_1$			$-H_{R_1}$	$-h_7^{ob}$

Przykład ułożenia równań poprawek

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -H_{R_1} & -h_1^{ob} \\ & -h_2^{ob} \\ -H_{R_3} & -h_3^{ob} \\ & -h_4^{ob} \\ & -h_5^{ob} \\ & H_{R_2} & -h_6^{ob} \\ -H_{R_1} & -h_7^{ob} \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie

Wyrównane wysokości

$$\hat{X} = -(A^T P A)^{-1} \cdot (A^T P L) \quad (4)$$

Rozwiązanie

Wyrównane wysokości

$$\hat{X} = -(A^T P A)^{-1} \cdot (A^T P L) \quad (4)$$

Poprawki do obserwacji

$$\hat{V} = A \hat{X} + L \quad (5)$$

Rozwiązanie

Wyrównane wysokości

$$\hat{X} = -(A^T P A)^{-1} \cdot (A^T P L) \quad (4)$$

Poprawki do obserwacji

$$\hat{V} = A \hat{X} + L \quad (5)$$

Kontrola

$$A^T P V = \vec{0} \quad (6)$$

$$V^T P V = L^T P V = L^T P A \hat{X} + L^T P L \quad (7)$$

Rozwiązanie

Wyrównane wysokości

$$\hat{X} = -(A^T P A)^{-1} \cdot (A^T P L) \quad (4)$$

Poprawki do obserwacji

$$\hat{V} = A \hat{X} + L \quad (5)$$

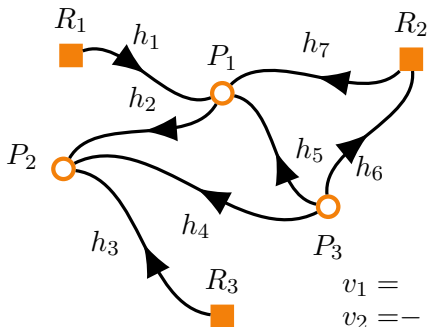
Kontrola

$$A^T P V = \vec{0} \quad (6)$$

$$V^T P V = L^T P V = L^T P A \hat{X} + L^T P L \quad (7)$$

Wyrównane obserwacje

$$h^w = h^{ob} + V \quad (8)$$



Współrzędne przybliżone

$$H_1^0 = H_{R_1} + h_1^{ob}$$

$$H_2^0 = H_{R_3} + h_3^{ob}$$

$$H_3^0 = H_{R_2} - h_6^{ob}$$

Przyrosty do współrzędnych

$$H_1 = H_1^0 + dH_1$$

$$H_2 = H_2^0 + dH_2$$

$$H_3 = H_3^0 + dH_3$$

$v_1 = dH_1$	$+H_1^0 - H_{R_1} - h_1^{ob}$
$v_2 = -dH_1 + dH_2$	$-H_1^0 + H_2^0 - h_2^{ob}$
$v_3 = dH_2$	$+H_2^0 - H_{R_3} - h_3^{ob}$
$v_4 = dH_2 - dH_3 + H_2^0 - H_3^0 - h_4^{ob}$	
$v_5 = dH_1 - dH_3 + H_1^0 - H_3^0 - h_5^{ob}$	
$v_6 = -dH_3 - H_3^0 + H_{R_2} - h_6^{ob}$	
$v_7 = dH_1 + H_1^0 - H_{R_2} - h_7^{ob}$	

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad dX = \begin{bmatrix} dH_1 \\ dH_2 \\ dH_3 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} H_1^0 - H_{R_1} - h_1^{ob} \\ -H_1^0 + H_2^0 - h_2^{ob} \\ H_2^0 - H_{R_3} - h_3^{ob} \\ H_2^0 - H_3^0 - h_4^{ob} \\ H_1^0 - H_3^0 - h_5^{ob} \\ -H_3^0 + H_{R_2} - h_6^{ob} \\ H_1^0 - H_{R_1} - h_7^{ob} \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie

Wyrównane przyrosty wysokości

$$d\hat{X} = -(A^T P A)^{-1} \cdot (A^T P L) \quad (9)$$

Rozwiązanie

Wyrównane przyrosty wysokości

$$d\hat{X} = -(A^T P A)^{-1} \cdot (A^T P L) \quad (9)$$

Wyrównane wysokości

$$H^w = H^0 + d\hat{X} \quad (10)$$

Rozwiązanie

Wyrównane przyrosty wysokości

$$d\hat{X} = -(A^T P A)^{-1} \cdot (A^T P L) \quad (9)$$

Wyrównane wysokości

$$H^w = H^0 + d\hat{X} \quad (10)$$

Poprawki do obserwacji

$$\hat{V} = A d\hat{X} + L \quad (11)$$

Rozwiązanie

Wyrównane przyrosty wysokości

$$d\hat{X} = -(A^T P A)^{-1} \cdot (A^T P L) \quad (9)$$

Wyrównane wysokości

$$H^w = H^0 + d\hat{X} \quad (10)$$

Poprawki do obserwacji

$$\hat{V} = A d\hat{X} + L \quad (11)$$

Kontrola

$$A^T P V = \vec{0} \quad (12)$$

$$V^T P V = L^T P V = L^T P A d\hat{X} + L^T P L \quad (13)$$

Rozwiązanie

Wyrównane przyrosty wysokości

$$d\hat{X} = -(A^T P A)^{-1} \cdot (A^T P L) \quad (9)$$

Wyrównane wysokości

$$H^w = H^0 + d\hat{X} \quad (10)$$

Poprawki do obserwacji

$$\hat{V} = A d\hat{X} + L \quad (11)$$

Kontrola

$$A^T P V = \vec{0} \quad (12)$$

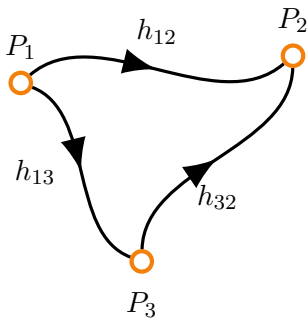
$$V^T P V = L^T P V = L^T P A d\hat{X} + L^T P L \quad (13)$$

Wyrównane obserwacje

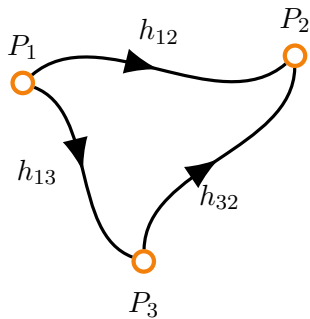
$$h^w = h^{ob} + V \quad (14)$$

Problem z odwrotnością macierzy $A^T P A$

Czy tę sieć niwelacyjną można wyrównać?



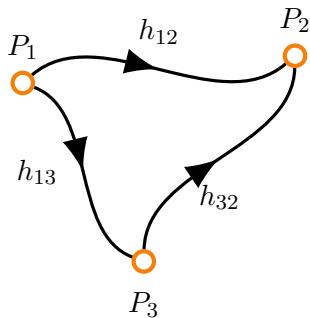
Problem z odwrotnością macierzy $A^T P A$



Czy tę sieć niwelacyjną można wyrównać?

$$\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{13} \\ v_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_{12} \\ h_{13} \\ h_{32} \end{bmatrix}$$

Problem z odwrotnością macierzy $A^T P A$



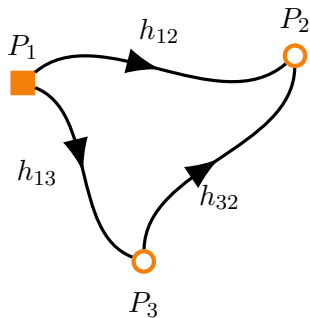
Czy tę sieć niwelacyjną można wyrównać?

$$\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{13} \\ v_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_{12} \\ h_{13} \\ h_{32} \end{bmatrix}$$

Problemem jest osobliwość macierzy A :

$$\det A = 0 = \det A^T A$$

Problem z odwrotnością macierzy $A^T P A$



Czy tę sieć niwelacyjną można wyrównać?

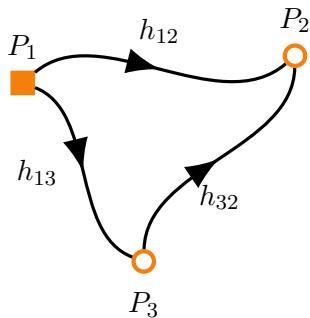
$$\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{13} \\ v_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_{12} \\ h_{13} \\ h_{32} \end{bmatrix}$$

Problemem jest osobliwość macierzy A :

$$\det A = 0 = \det A^T A$$

Nieznane wysokości można przesuwąć o znaną wartość nie zniekształcając obserwacji.

Problem z odwrotnością macierzy $A^T P A$



Czy tę sieć niwelacyjną można wyrównać?

$$\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{13} \\ v_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_{12} \\ h_{13} \\ h_{32} \end{bmatrix}$$

Problemem jest osobliwość macierzy A :

$$\det A = 0 = \det A^T A$$

Nieznane wysokości można przesuwąć o znaną wartość nie zniekształcając obserwacji.

$$\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{13} \\ v_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_{12} - H_1 \\ h_{13} - H_1 \\ h_{32} \end{bmatrix}$$