

Seminarium Zakład Geodezji i Astronomii Geodezyjnej Wydział Geodezji i Kartografii Politechniki Warszawskiej pt. "Systemy odniesień przestrzennych – podstawy geodynamiczne, aktualne realizacje oraz kierunki rozwoju" Grybów 8-10 czerwca 2022

Roman J. Kadaj

Porównanie istniejących wysokorozdzielczych modeli geopotencjalnych w aspekcie ich zastosowania do tworzenia lokalnego modelu quasigeoidy

- Wprowadzenie do problematyki
- Ocena porównawcza pięciu wysokorozdzielczych (stopnia n =2190) globalnych modeli geopotencjalnych EGM2008, EIGEN 6c4, GECO, SGG-UGM-2, XGM2019e – wybór modelu bazowego
- Metodologia opracowania lokalnej quasigeoidy (GEOIDPOL-2021)
- Testy numeryczne

# Porównanie istniejących wysokorozdzielczych modeli geopotencjalnych w aspekcie ich zastosowania do tworzenia lokalnego modelu quasigeoidy

### Streszczenie

W referacie przedstawiono charakterystykę i porównanie dokładnościowe globalnych modeli pola siły ciężkości o najwyższej rozdzielczości, z lokalnym ograniczeniem się do obszaru Polski. Były to modele o nazwach autorskich: EGM2008, EIGEN 6c4, GECO, SGG-UGM-2 i XGM2019e, dostępne w sieci w postaci szeregów harmonik sferycznych (lub sferoidalnych) do stopnia n = 2190 oraz programów generujących *on-line* (dla określonego obszaru lokalnego) dyskretne zbiory różnych danych modelowych (anomalie lub zakłócenia grawimetryczne, wartości i gradienty potencjału siły ciężkości, anomalie wysokości guasigeoidy i undulacje geoidy). W wyniku analiz porównawczych (wzajemnych i bezwzględnych) uzasadniono wybór modelu EGM2008 do tworzenia na obszarze Polski precyzyjnego modelu numerycznego guasi-geoidy z uwzględnieniem naziemnych pomiarów grawimetrycznych, niwelacyjnych i satelitarnych. Zastosowana metoda (w pewnej części stanowi opracowanie w konkursie organizowanym przez GUGiK w roku 2021) opiera się na wykorzystaniu residuów zakłóceń grawimetrycznych oraz residuów wysokości niwelacyjnych w stosunku do globalnego modelu topograficznego ETOPO1 (NOAA - National Oceanic and Atmospheric Administration - National Centers for Environmental Information) o rozdzielczości 1' x 1', przyjętego do generowania modelowych danych geopotencjalnych. Dane te posłużyły z kolei do wyznaczenia gradientowych zmian (korekt) modelowych anomalii wysokości i ich powierzchniowej dystrybucji przy wykorzystaniu metod geo-statystycznych, czyli bez konieczności stosowania powierzchniowego całkowania residualnych anomalii grawimetrycznych. Finalna postać guasigeoidy w układzie PL-EVRF2007-NH otrzymuje się poprzez jej numeryczne wpasowanie (w szczególności metodą Krigingu) w zbiór empirycznych anomalii wysokości określonych przez punkty satelitarno-niwelacyjne.

### Definicje pojęć istotnych w temacie - komentarze do slajdów 4, 5, 6

Do klasy **wysokorozdzielczych modeli geopotencjalnych** zaliczamy obecnie modele przedstawione w postaci rozwinięcia w szereg harmonik sferycznych (lub sferoidalnych) **stopnia** n<sub>max</sub> = 2190 oraz rzędu m = 2158 ÷ 2190, zgodnie z podanym wzorem ogólnym szeregu (**slajd 3**). Każdy model definiują numerycznie współczynniki harmonik wraz z ich parametrami dokładności (odchyleniami standardowymi), natomiast tzw. **stowarzyszone funkcje** Legendre'a mają postać uniwersalną, wyrażającą się za pomocą formuł rekurencyjnych (**slajd 4**). W Internecie znajdujemy publikacje pięciu modeli geopotencjalnych wymienionych na **slajdzie 4**. Szczegółową charakterystykę tych modeli podano natomiast na **slajdzie 6**.

Na podstawie modelu geopotencjalnego i standardowego potencjału normalnego jednorodnej elipsoidy poziomowej zdefiniowany jest potencjał zakłócający oraz dowolne z wymienionych na **slajdzie 5** parametry punktowe pola potencjalnego. Dla celów niniejszej pracy, generowanie tych parametrów wykonano na serwerze **GFZ – Potsdam** dla siatki współrzędnych geodezyjnych o rozdzielczości 0.01° x 0.01°, w zakresie współrzędnych geodezyjnych o bejmujących z pewnym (stopniowym) zapasem obszar Polski, B: 13°-25°, L: 48°-56°, czyli w sumie dla **962001** węzłów. Program zakłada standardowo model topograficzny Ziemi o nazwie **ETOPO1** (model afiliowany przez **NOAA**).

# POTENCJAŁ SIŁY CIĘŻKOŚCI

Potencjał siły ciężkości (W) jest sumą potencjału siły przyciągania (V) i potencjału siły odśrodkowej ruchu obrotowego Ziemi (R).

 $m \equiv m$ 

 $W(r, \varphi, \lambda) = V(r, \varphi, \lambda) + Q(r, \varphi) [r, \varphi, \lambda - współrzędne biegunowe punktu, r - odległość od środka Ziemi],$ 

Potencjał siły przyciągania

$$V(r, \varphi, \lambda) = (GM/r) \cdot \{1 + \sum_{n=0}^{\infty} [(a/r)^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm}(\varphi, \lambda)]\},$$

n=n

 $A_{nm}(\varphi, \lambda) = [C_{nm} \cdot \cos(m \cdot \lambda) + S_{nm} \cdot \sin(m \cdot \lambda)] \cdot P_{nm}(\sin(\varphi))$ 

Potencjał siły odśrodkowej  $Q(r, \varphi) = (\frac{1}{2}) \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot \cos^2(\varphi)$ 

C<sub>nm</sub>, S<sub>nm</sub> – to w pełni znormalizowane współczynniki harmonik sferycznych stopnia n i rzędu m (np. Torge 2001). Kompletne zbiory wartości współczynników są opublikowane dla modeli geopotencjalnych (modele wysokorozdzielcze dla n<sub>max</sub> = 2190 :

EGM08 (2008, NGA ), EIGEN 6c4 (2013, GFZ Potsdam – GER / GRGS Toulouse FRA), GECO (2016 – Milano - ITA), SGG-UMG-2 (2020-CHINA), XGM2019e (2020 - ESA),

 $P_{nm}(sin\phi) - m$  - te pochodne, n - tego stopnia wielomianów Legendre'a, jako tzw. stowarzyszone funkcje Legendre'a. Wzory rekurencyjne [Holmes and Featherstone 2002 i np.: Trojanowicz 2009, Łyszkowicz 2012b- p. 9.5]:

$$\begin{split} P_{00} &= 1, \quad P_{10} = sin(\varphi) \cdot 3^{\frac{1}{2}}, \quad P_{11} = cos(\varphi) \cdot 3^{\frac{1}{2}}, \\ P_{m,m} &= cos(\varphi) \cdot [1 + (2 \cdot m)^{-1}]^{\frac{1}{2}} \cdot P_{m-1,m-1}, \qquad m = n > 1 \\ P_{n,m} &= \alpha_{n,m} \cdot sin(\varphi) \cdot P_{n-1,m} - \beta_{n,m} \cdot P_{n-2,m} \qquad m < n \\ \alpha_{nm} &= [(2 \cdot n-1) \cdot q_{nm}]^{\frac{1}{2}}, \quad \beta_{nm} = [(n-1-m) \cdot (n-1+m) \cdot (2 \cdot n-3)^{-1} \cdot q_{nm}]^{\frac{1}{2}}, \quad \text{gdzie:} \quad q_{nm} = (2 \cdot n+1) \cdot (n-m)^{-1} \cdot (n+m)^{-1} \\ \text{Dane modelu Ziemi GRS80:} \quad a = 6378137 \ m, \quad GM = 398 \ 600.5 \cdot 10^{9} \ [m^{3} \cdot s^{-2}], \quad \omega = 7.292115 \cdot 10^{-5} \ [rad \cdot s^{-1}]. \end{split}$$



# POTENCJAŁ NORMALNY I POTENCJAŁ ZAKŁÓCAJĄCY (ANOMALNY)

#### Potencjał normalny

- potencjał jednorodnej elipsoidy obrotowej (tzw. elipsoidy poziomowej) o masie równej masie Ziemi (M) i prędkości obrotowej równej prędkości obrotowej Ziemi ( $\omega$ ). Potencjał normalny (U), w analogii do potencjału rzeczywistego Wokreśla się w rozwinięciu na szereg harmonik sferycznych, przy czym ze względu na symetrię każdego przekroju południkowego względem osi obrotu Ziemi i symetrię względem równika, model tego pola nie zależy od długości geograficznej i wyraża się w funkcji parzystych harmonik o współczynnikach  $\underline{C}_{n,0}$  (wystarczającą dokładność uzyskuje się do stopnia n = 6):



Potencjał zakłócający (anomalny): różnica potencjałów: rzeczywistego (W) i normalnego (U) w danym punkcie:

 $T(r, \varphi, \lambda) = W(r, \varphi, \lambda) - U(r, \varphi)$  lub krócej: T(P) = W(P) - U(P)

Program na serwerze GFZ Potsdam, oprócz potencjałów (rzeczywistego, normalnego, zakłócającego), dla węzłów zdefiniowanej siatki współrzędnych geodezyjnych generuje: anomalie wysokości (quasi-geoidy) undulacje geoidy, anomalie lub zakłócenia grawimetryczne, gradienty potencjału, dla danego modelu geopotencjalnego i założonego modelu topograficznego ETOPO1 (NOAA - National Oceanic and Atmospheric Administration)

# AKTUALNE WYSOKOROZDZIELCZE MODELE GEOPOTENCJALNE

1.	EGM2008 [ 2008 ]	n = 2190 m = 2158	[ Pavlis i in NGA (National Geospatial-Intelligence Agency, 2008, raster of 2.5'×2.5' , geneza: GRACE – misja, terra-grawimetria ].
2.	EIGEN 6c4 [2015]	<b>n = 2190 m = 2190</b> [w 2014 było n=m=1949]	[GFZ-Potsdam – Int. Centre for Global Earth Models & GRGS Toulouse - Le Groupe de Recherche de Géodésie Spatiale]
3.	<b>GECO</b> [ 2016 ]	n = 2190 m = 2158	[ Department of Civil and Environmental Engineering (DICA), Politecnico di Milano (Mediolan), Italy geneza: kombinacja danych GOCE + EGM2008]
4.	<b>SGG-UGM-2</b> [ 2020 ]	n = 2190 m = 2158	[ Model harmonik sferoidalnych opracowany przez chińskich geodetów w roku 2020; geneza: dane satelitarne GOCE, GRACE, Altimetria oraz model EGM2008 ]
5.	<b>XGM2019e</b> [ 2020 ]	n = 2190 m = 2158	[ Model kombinowany afiliowany przez ESA; korzystano z danych satelitarnych GOCE i użyczonych przez NGA]

Misje satelitarne geodynamiczne:	CHAMP -	CHAllenging Minisatellite Payload (GER – 2000)
	GRACE -	Gravity Recovery And Climate Experiment (NASA & GER –2002)
	GOCE -	Gravity and Ocean Circulation Explorer (ESA – 2009)

## Wybór bazowego modelu geopotencjalnego - komentarze do slajdów 8, 9, 10, 11,12

Istotnym elementem w zadaniu tworzenia lokalnego modelu numerycznego quasigeoidy (dla obszaru Polski) jest wybór najbardziej adekwatnego modelu geopotencjalnego, na bazie którego tworzy się model dopasowany do lokalnych danych grawimetrycznych i geodezyjnych (niwelacyjnych). Aby zrealizować to zadanie dokonano najpierw wstępnej selekcji modeli poprzez porównanie wzajemne generowanych z modelu anomalii wysokości quasigeoidy (slajd 8) oraz wartości gradientów potencjałów (czyli przyśpieszeń siły ciężkości) (slajd 9). Różnice wzajemne anomalii wysokości wyrażano w metrach, natomiast różnice gradientów potencjałów – w miligalach. W każdym przypadku widzimy, że pierwsze trzy z wymienionych modeli EGM2008, EIGEN 6c4, GECO wykazują, w przeciwieństwie do pozostałych modeli (SGG, XGM) niewielkie wzajemne odchylenia. Modele SGG i XGM charakteryzują w obszarze Polski dość istotne rozproszenia danych (być może ich jakość zmienia się w różnych obszarach Ziemi). Wyselekcjonowane wstępnie trzy modele EGM2008, EIGEN 6c4, GECO poddano następnie dalszym badaniom.

Są to dwa rodzaje testów (slajdy 10,11,12):

- (a) badania spójności (zgodności) wewnętrznej w zakresie generowanych parametrów (slajdy 10, 11)
- (b) porównania modelowych anomalii wysokości z anomaliami empirycznymi (dla zbiorów punktów sieci satelitarnoniwelacyjnych – slajd 12).

Stwierdzono, że różnice pomiędzy systemami pływowymi (zero-tide i tide free), zarówno dla undulacji geoidy jak też anomalii wysokości quasigeoidy są regularne i dają się opisać prostym wzorem liniowym (**slajd 10**). Niestety od tej reguły "wyłamuje się" model **EIGEN 6c4** w zakresie anomalii wysokości (pokolorowane na żółto) (**slajd 10**). A więc błędne mogą być wartości  $\zeta$  w jednym z dwóch systemów pływowych, najpewniej wynikające z jakiegoś defektu programu komputerowego. Aby zidentyfikować, w którym systemie pływowym jest błąd, zbadano w obu systemach różnice pomiędzy anomalią wysokości (quasigeoidy) a undulacją (geoidy) (**slajd 11**). Okazało się, że od regularności właściwej dla wszystkich modeli odbiegają (w modelu **EIGEN 6c4**) anomalie wysokości generowane dla systemu bezpływowego (*tide free*). Na **slajdzie 12** przedstawiono wyniki porównania modelowych anomalii wysokości z anomaliami empirycznymi na punktach sieci satelitarno – niwelacyjnych. Wartości anomalii modelowych przesunięto uprzednio o pewną wartość stałą  $\Delta \zeta_o$  (skalibrowano do układów: **PL-EVRF2007-NH**, **PL-ETRF2000**), o której będzie mowa dalej w części dotyczącej opracowania lokalnej quasigeoidy. Widzimy, że nieznacznie lepsze parametry dokładnościowe wykazuje model **EGM2008** i ten przyjęto ostatecznie jako model bazowy.



#### Porównanie anomalii wysokości (różnice pomiędzy modelami)

Liczba punktów siatki grid: 962001 wierzchołków co 0.01° w obszarze ograniczonym szerokością B od 40° do 56° i długością L od 13° do 25°. Opcja: modele zero – pływowe (zero-tide)

		Śred	nie wartości	i różnic and	omalii wyso	kości [m]		
1	x	-0.002	-0.000	0.004	-0.001	0.000	EGM2008	
2		x	0.001	0.006	0.001	0.002	EIGEN 6c4	
3			x	0.005	-0.001	0.001	GECO	
4				x	-0.005	0.002	SGG-UGM-2	
5					x	-0.002	XGM2019e	
		Sred	nie absolutr	ne różnic a	nomalii wys	okości [m]		
1	x	0.021	0.021	0.022	0.026	0.023	EGM2008	
2		x	0.013	0.016	0.020	0.017	EIGEN 6c4	
3			x	0.019	0.022	0.018	GECO	
4				x	0.023	0.020	SGG-UGM-2	
5					x	0.023	XGM2019e	
		Różn	ice maksym	alne [m]				
1	x	0.086	0.080	0.125	0.183	0.118	EGM2008	
2		х	0.051	0.073	0.172	0.095	EIGEN 6c4	
3			x	0.094	0.188	0.103	GECO	
4				x	0.159	0.113	SGG-UGM-2	
5					х	0.175	XGM2019e	
		Różn	ice minimal	ne [m]				
1	x	-0.078	-0.125	-0.090	-0.172	-0.116	EGM2008	
2		x	-0.062	-0.084	-0.176	-0.100	EIGEN 6c4	
3			x	-0.078	-0.170	-0.109	GECO	
4				x	-0.180	-0.108	SGG-UGM-2	
5					х	-0.174	XGM2019e	

	Porównania nienowych gradiontów natanciałów (przyśnieczać)								
Cobernet réinie	Porownanie pionowych gradientów potencjałów (przyspieszen)								
Schemat roznic:									
1- EGM2008	LICZ	ba pur okości	$1 \times 10^{\circ}$	l gria: 9620 do 56º i dłu		01KOW CO U		ze ograniczonym	
	Opc	ia: mo	ią b ou 40 m dele zero –	pływowe (	zero-tide)	15 40 25	•		
2-EIGEN 6c4				p.,					
5-XGM2019e		Śr	ednie warto	ości różnic g	gradientów	dla grid [m	nGal]		
	1	x	-0.016	-0.018	-0.003	-0.006	-0.010	EGM2008	
$\land \uparrow \checkmark \land \land \land$	2		x	-0.002	0.013	0.010	0.001	EIGEN 6c4	
	3			x	0.015	0.012	0.002	GECO	
4-SGG-UGM-2 3-GECO	4				х	-0.003	0.005	SGG-UGM-2	
	5					x	0.003	XGM 2019e	
		Śr	ednie absol	utne różnic	gradientó	w dla grid	[mGal]		
	1	x	0.501	0.569	0.597	2.411	1.020	EGM2008	
	2		x	0.483	0.512	2.378	0.969	EIGEN 6c4	
grid modelu PL-quasigeoid-2021	3			x	0.705	2.417	1.044	GECO	
	4				х	2.439	1.063	SGG-UGM-2	
	5					x	2.411	XGM 2019e	
	Różnice maksymalne dla grid [mGal]								
	1	x	3.339	2.317	8.699	27.901	10.564	EGM2008	
Wybór wstępny trzech modeli:	2		x	2.405	8.539	27.667	10.488	EIGEN 6c4	
FGM2008 (2)	3			x	8.625	28.368	10.428	GECO	
	4				x	27.389	13.313	SGG-UGM-2	
	5					x	27.831	XGM 2019e	
GECO (3)			Różn	ice minima	Ine dla grid	d [mGal]			
	1	x	-2.420	-3.583	-11.130	-24.244	-10.344	EGM2008	
	2		x	-3.134	-11.910	-24.508	-10.493	EIGEN 6c4	
	3			х	-11.827	-23.750	-10.574	GECO	
	4				х	-25.029	-14.974	SGG-UGM-2	
	5					х	-24.383	XGM 2019e	

Analiza spójności wewnętrznej modeli na siatkach interpolacyjnych o rozdzielczości 1° w zakresie współrzędnych geodezyjnych B (od 48° do 56°), L (od 13° do 25°).

#### Modele EGM08 i GECO

 $\zeta$  (tide\_free) –  $\zeta$  (zero\_tide) = 0.0195 + (B<sup>o</sup> – 48<sup>o</sup>) · 0.0015 [m]

N (tide\_free) – N (zero\_tide) = 0.0195 + ( B° – 48° ) · 0.0015 [m]

Z błędem |e| < 0.0001 m

Model EIGEN 6C4 (niestety, generowane anomalie wysokości dla tego modelu na serwerze GFZ – Potsdam są błędne albo dla *tide-free* albo dla *zero-tide*)

			ζ1	ζ2	ζ <sub>2</sub> - ζ <sub>1</sub>	N1	N2	N2-N1
L	в	н	zero-tide	tide-free	różnica	zero-tide	tide-free	różnica
0	0	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]
		• • • • • • • •			<u></u> .	• • • • • • • • • • •		
13	56	79.00	36.18078	36.21616	<mark>0.0354</mark>	36.18217	36.21365	0.0315
14	56	68.00	34.61465	34.64739	<mark>0.0327</mark>	34.61465	34.64653	0.0315
15	56	0.00	33.15119	33.18266	0.0315	33.15119	33.18205	0.0315
16	56	0.00	31.85770	31.88918	0.0315	31.85770	31.88851	0.0315
17	56	0.00	29.85279	29.88427	0.0315	29.85279	29.88374	0.0315
18	56	0.00	27.39294	27.42442	0.0315	27.39294	27.42460	0.0315
19	56	0.00	25.70537	25.73685	0.0315	25.70537	25.73728	0.0315
20	56	0.00	24.86506	24.89653	0.0315	24.86506	24.89666	0.0315
21	56	0.00	24.07774	24.10922	0.0315	24.07774	24.10951	0.0315
22	56	149.00	23.85103	23.88321	<mark>0.0322</mark>	23.85103	23.88021	0.0315
23	56	103.00	23.51952	23.55250	<mark>0.0330</mark>	23.51952	23.55110	0.0315
24	56	50.00	22.49471	22.52622	0.0315	22.49471	22.52589	0.0315
					[?]			ok.
itd	•							

RÓŻNICE P W DWÓCH S	OMIĘDZY QUASI- SYSTEMACH PŁY	GEOIDĄ A GEOIDĄ WOWYCH	RÓŻNICE POMIĘDZY QUASIGEOIDĄ A GEOIDĄ W DWÓCH SYSTEMACH PŁYWOWYCH			
	MODEL EGM20	08		MODEL EIGEN 6c	4	
۲ ۲	(zero_tide) – N (ze (tide_free) – N (tid	ero_tide) de_free)	ζ (zero_tide) – N (zero_tide) ζ (tide_free) – N (tide_free			
LB	ζ- N Zero-tide	ζ- N tide-free	LB	ζ-Ν Zero-tide	ζ- Ν tide-free	
13 56 14 56 15 56 16 56 17 56 18 56 19 56 20 56 21 56 23 56 24 56 23 56 24 56 25 56 13 55 14 55 15 55 16 55 17 55 18 55 18 55 18 55 18 55	-0.0014 -0.0004 0.0006 0.0005 -0.0002 -0.0002 -0.0002 -0.0003 0.0023 -0.0002 0.0003 0.0003 0.0008 0.0004 0.0011 0.0008 0.0004 	-0.0014 -0.0004 0.0006 0.0005 -0.0002 -0.0002 -0.0003 0.0023 -0.0002 0.0003 0.0003 0.0003 -0.0004 0.00011 0.0008 0.0008 0.0008 0.0004 	13 56 14 56 15 56 16 56 17 56 18 56 19 56 20 56 21 56 23 56 23 56 24 56 25 56 13 55 14 55 15 55 16 55 16 55 17 55 18 55 18 55 itd.	-0.0014 -0.0004 0.0006 0.0007 0.0005 -0.0002 -0.0004 -0.0001 -0.0003 0.0023 -0.0001 0.0003 0.0008 0.0003 -0.0003 0.0011 0.0008 0.0008 0.0008	0.0025 0.0009 0.0006 0.0007 0.0005 -0.0002 -0.0004 -0.0001 -0.0003 0.0030 0.0014 0.0003 0.0003 0.0003 -0.0003 0.0003 0.0003 0.0003 0.0003 0.0008 0.0008 0.0008 0.0008 0.0008 0.0008 0.0008 0.0008 0.0008 0.0008 0.0004 ζ - tide free error(?)	

Analiza różnic pomiędzy empirycznymi i modelowymi (wstępnie skalibrowanymi - scentrowanymi) anomaliami wysokości (na zbiorze 333 punktów satelitarnoniwelacyjnych). Wartości modelowe określono przez interpolację biliniową.

model EGM08			
Najmniejsza odchyłka dZmin	=	-0.040	m
Największa odchyłka dZmax	=	0.034	m
Średnia odchyłka SUM(dZ)/n	=	-0.003	m
Przeciętna mod. SUM( dZ )/n	=	0.014	m
Średniokwadratowa S	=	0.018	m
model EIGEN 6c4			
Najmniejsza odchyłka dZmin	=	-0.040	m
Największa odchyłka dZmax	=	0.040	m
Średnia odchyłka SUM(dZ)/n	=	-0.004	m
Przeciętna mod. SUM( dZ )/n	=	0.015	m
Średniokwadratowa S	=	0.018	m
model GECO			
Najmniejsza odchyłka dZmin	=	-0.040	m
Największa odchyłka dZmax	=	0.040	m
Średnia odchyłka SUM(dZ)/n	=	-0.003	m
Przeciętna mod. SUM( dZ )/n	=	0.015	m
Średniokwadratowa S	=	0.018	m

## Etapy opracowania quasigeoidy o roboczej nazwie GEOIDPOL-2021

- I Założenia (dane):
  - 1) Układy odniesienia: wysokościowy PL-EVRF2007-NH (wysokości normalne) i geometryczny PL-ETRF2000
  - Modele geopotencjalne wysokorozdzielcze, publicznie dostępne (EGM2008, EIGEN 6c4, GECO, SGG-UGM-2, XGM2019e), stopnia n = 2190, zero pływowe, dla elipsoidy GRS80, w siatce 0.01° x 0.01° w obszarze (L: 13° 25°) x (B: 48° 56°), t.j. dla 962001 węzłów, dla modelu topograficznego ETOPO1 (NOAA National Oceanic and Atmospheric Administration National Centers for Environmental Information) wygenerowane w GFZ (Geoforschungszentrum) Potsdam.
  - 3) Dane empiryczne (w nawiasach podano liczby punktów efektywnie wykorzystanych):
    - podstawowa (fundamentalna i bazowa) osnowa geodezyjna, wielofunkcyjna [stacje i ekscentry ASG-EUPOS (97+109), EUREF-POL+ POLREF+ EUVN (316)],
    - podstawowa (fundamentalna i bazowa) osnowa grawimetryczna (85+168),
    - masowe dane grawimetryczne z obszaru Polski [832448 (PIG) + 651(PW)] oraz z obszarów przygranicznych: Bałtyku (17809), Czech (2082), Słowacji (8529)
- II. Wybór 3/5 bazowych, a następnie 1/3 modeli geopotencjalnych przez <u>badania porównawcze, wzajemne</u> i <u>bezwzględne</u> (w odniesieniu do danych empirycznych) oraz <u>badanie spójności wewnętrznej parametrów modelu</u>.
- III. Wstępna kalibracja <u>modelowych anomalii wysokości</u> w odniesieniu do odpowiadających danych empirycznych [ empiryczne wyznaczenie i uwzględnienie offsetów pomiędzy wartościami modelowymi i wynikającymi z danych satelitarno-niwelacyjnych ].
- IV. Obliczenie <u>residualnych zmian wysokości i gradientów potencjału</u> dla wszystkich punktów grawimetrycznych oraz wyznaczenie na podstawie liniowej formuły różniczkowej <u>residualnych zmian (korekt) modelowych anomalii</u> wysokości .
- V. Transformacja (dystrybucja) residuów anomalii wysokości punktów grawimetrycznych na węzły siatki interpolacyjnej quasigeoidy oraz finalne wpasowanie (kalibracja) modelu quasigeoidy w zbiór punktów satelitarno-niwelacyjnych metodami geostatystycznymi (Kriging). Walidacja finalnego modelu quasigeoidy GEOIDPOL-2021.

[Szczegółowe algorytmy będą przedstawione w publikacji pokonferencyjnej]

# Dane zbiory punktów z pomierzonymi gradientami potencjału siły ciężkości

• Masowe dane grawimetryczne



#### Osnowy grawimetryczne

Podstawowa osnowa grawimetryczna (fundamentalna i bazowa) w liczbie punktów 253 (85+168) dana w następujących rekordach [ nr , 2D, H<sub>PL-KRON86-NH</sub> , g, mg, VG, Typ VG ]

- 2D to dwuwymiarowe dane pozycyjne punktu, czyli współrzędne geodezyjne B, L lub płaskie x, y (w układzie PL-1992)
- $g przyśpieszenie rzeczywiste pomierzone na punkcie osnowy, w [<math>\mu$ Gal] (mikrogal),
- mg błąd średni pomiaru w [µGal],
- VG gradient przyśpieszenia, wraz z typem (liniowy/rzeczywisty)

#### • Punkty satelitarno-niwelacyjno-grawimetryczne

- ekscentry stacji referencyjnych ASG-EUPOS z niwelacją precyzyjną i pomierzonymi przyśpieszeniami (g) 109 punktów,
- punkty sieci POLREF, EUREF-POL, EUVN z niwelacją techniczną lub precyzyjną i pomierzonymi g 316 punktów,
- punkty centralne stacji referencyjnych z niwelacją satelitarną i pomierzonymi g 97 punktów

Modyfikacje anomalii wysokości modelu geopotencjalnego na podstawie punktowych (rozproszonych) danych geodezyjno - grawimetrycznych

$$\zeta(\mathbf{P}) = \Delta \zeta_o + \zeta_{model}(\mathbf{P}) + d\zeta_{res}(\mathbf{P}) + s(\mathbf{P})$$

Δζ<sub>o</sub> = stała wartość przesunięcia wynikająca z różnicy lokalnych i modelowych układów odniesienia, a fizycznie z nierówności potencjału rzeczywistego na geoidzie i potencjału normalnego na elipsoidzie. Stała ta została określona empirycznie, niezależnie dla trzech wybranych modeli geopotencjalnych, jako średnia w zbiorze 109 punktów satelitarno-niwelacyjnych (ekscentry stacji ASG-EUPOS w układach: PL-ETRF2000, PL-EVRF2007-NH (z niwelacją precyzyjną)]:

*Δ*ζ<sub>o</sub> [m] := 0.3710 (EGM08), 0.3655 (EIGEN 6c4), 0.3641(GECO)



 $d\zeta_{res}(\mathbf{P})$  = poprawka do anomalii modelowej w liniowej funkcji residuum gradientu potencjału (pomierzony minus modelowy) i residuum wysokości topograficznej punktu  $\mathbf{P}$  względem wysokości modelu ETOPO1. Definicja tego składnika jako najważniejszego elementu metody udokładniania modelowej quasigeoidy jest podana na następnym slajdzie.

 $s(\mathbf{P})$  = finalny składnik wpasowania (transformacji, kalibracji) quasigeoidy na punkty satelitarno-niwelacyjne

**Poprawka (korekta) anomalii wysokości**  $d\zeta_{res}$  w funkcji residuów <u>*dH*</u>, *dg* ( $ndg = \underline{nadmiar} / \underline{niedomiar}$  grawimetryczny względem modelu)

$$d\zeta_{res}(\mathbf{P}) = \left[\frac{\partial \zeta}{\partial g}\right] \cdot ndg \quad \text{gdzie} \quad ndg = dg - \underline{dH} \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial H}\right] \qquad [m]$$
$$=> d\zeta_{res}(\mathbf{P}) = -\left[\frac{\partial \zeta}{\partial H}\right] \cdot \underline{dH} + \left[\frac{\partial \zeta}{\partial g}\right] \cdot dg$$
$$= \alpha(\mathbf{P}) \cdot \underline{dH} + \beta(\mathbf{P}) \cdot dg \qquad [m]$$

(jeśli  $dg = \underline{dH} \cdot [\partial g / \partial H]$  to ndg = 0 i w danym punkcie anomalia wysokości odpowiada wartości modelowej) residua grawimetryczne i wysokościowe:

 $dg = g_{pomierzone} - g_{modelowe} [mGal], \quad \underline{dH} = H_{pomierzone} - H_{modelowe} - \Delta_{H} [m]$  $\Delta_{H} =$ offset pomiędzy układami wysokościowymi (PL-EVRF2007-NH i przyjętym w modelu ETOPO1), wyznaczony empirycznie jako średnia dla punktów podstawowej osnowy grawimetrycznej.

#### współczynniki formuły liniowej:

$$\begin{aligned} \alpha(\boldsymbol{P}) &= -\left[\frac{\partial \zeta}{\partial H}\right] = -\left\{\left[\frac{\partial T(\boldsymbol{P})}{\partial H}\right] \cdot \gamma(\boldsymbol{Q}) - T(\boldsymbol{P}) \cdot \left[\frac{\partial \gamma(\boldsymbol{Q})}{\partial H}\right]\right\} \cdot \gamma^{-2}(\boldsymbol{Q}) = \\ &= -\left[-g(\boldsymbol{P}) + \gamma(\boldsymbol{P})\right] \cdot \gamma^{-1}(\boldsymbol{Q}) - \zeta \cdot 0.3086 \cdot \gamma^{-1}(\boldsymbol{Q}) = \gamma^{-1}(\boldsymbol{Q}) \cdot \left[\frac{\partial g(\boldsymbol{P})}{\partial g(\boldsymbol{P})} - 0.3086 \cdot \zeta\right] \\ &= \delta g(\boldsymbol{P}) = g(\boldsymbol{P}) - \gamma(\boldsymbol{P}) = \text{zakłócenie grawimetryczne (z modelu) (nie mylić \delta g z dg)} \\ &= \frac{\partial \gamma(\boldsymbol{Q})}{\partial H} \approx -0.3086 \text{ (średni gradient przyśpieszenia normalnego)} \\ &= \left[mGal/m\right] \\ &= \text{modelowa anomalia wysokości} \end{aligned}$$

$$\beta(\mathbf{P}) = \frac{\partial \zeta}{\partial g} = \left[\frac{\partial \zeta}{\partial H}\right] \cdot \left[\frac{\partial H}{\partial g}\right] = -\gamma^{-1}(\mathbf{Q}) \cdot \left[\frac{\partial g}{\mathbf{P}}\right] - 0.3086 \cdot \zeta\right] \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial H}\right]^{-1} \qquad [m/mGal]$$

$$\left[\frac{\partial g}{\partial H}\right] = \left[\frac{\partial g}{\partial H}\right]_{\text{zewn}} + 4 \cdot \pi \cdot G \cdot \sigma = \text{gradient przyśpieszenia rzeczywistego wewnątrz Ziemi [mGal/m]}$$

$$\left[\frac{\partial g}{\partial H}\right]_{\text{zewn}} = \text{gradient przyśpieszenia rzeczywistego zewnątrz Ziemi [średnio przyjmuje się jak w polu normalnym, czyli - 0.3086, ale realnie zmienia się nawet o ok. ± 30% więc dokładniej powinno być określone z pomiaru na powierzchni Ziemi (jak dla osnów grawimetrycznych) lub z modelu geopotencjalnego]$$

$$G = \text{stała grawitacji} = 6.673 \cdot 10^{-11} [m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}],$$

$$\sigma = \text{gestość ośrodka}, \sigma = 2.67 [g \cdot cm^{-3}] \text{ dla skorupy ziemskiej lub } \sigma = 1.03 [g \cdot cm^{-3}] \text{ dla wody morskiej.}$$



Obraz różnic pomiędzy GEIDPOL-2021 a EGM2008



Obraz różnic pomiędzy GEIDPOL-2021 a PL-GEOID-2011

Różnice pomiędzy modelem GEOIDPOL-2021, a skalibrowanymi modelami globalnymi EGM08, EIGEN 6c4, GECO i dotychczasowym modelem "urzędowym" PL-geoid-2011 w zakresie anomalii wysokości w pełnej siatce interpolacyjnej (962001 węzłów)

Różnice (	Parametr			
EGM08	EIGEN	GECO	PL-geoid	zmienności Δζ
-0.009 0.017 0.022 0.080 -0.058	-0.001 0.024 0.030 0.119 -0.108	-0.001 0.024 0.031 0.159 -0.109	-0.013 0.014 0.022 0.060 -0.391	średnie śr. absolutne śr. kwadratowe maksymalne *) minimalne *)

\*) punkty poza obszarem Polski

Porównanie empirycznych anomalii wysokości (ASG-EUPOS + POLREF) z anomaliami interpolowanymi z modelu GEOIDPOL-2021 )

Liczba punktów wspólny	n =	455
Najmniejsza odchyłka	dZmin =	-0.0474
Największa odchyłka	dZmax =	0.0437
Średnia odchyłka		0.0004
Przeciętna mod.		0.0059 m
Średniokwadratowa	s =	0.0093 m

Porównanie empirycznych i modelowych anomalii wysokości tylko dla punktów, których wysokości normalne wyznaczono metodą niwelacji precyzyjnej (ekscentry stacji ASG-EUPOS).

Liczba punktów wspólnyc	ch n	=	107
Najmniejsza odchyłka	dZmin	=	-0.0350
Największa odchyłka	dZmax	=	0.0336
Średnia odchyłka		=	0.0059
Przeciętna mod.		=	0.0079
Średniokwadratowa	S	=	0.0109

# RÓŻNICE ANONOMALII WYSOKOŚCI POMIĘDZY MODELAMI

[wwęzłach grid 0.01° x 0.01° w polu: 49°<B<55° i 14°<L<24.2°; liczba węzłów m = 613621]

### **GEOIDPOL-2021 z innymi**

GEOIDP	GEOIDPOL_2021 z EGM08 (1), EIGEN 6c4 (2), GECO(3), GUGIK(4)								
Średnia	Śr. abs	RMS	MAX	MIN	MODEL				
[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]					
7	16	20	57	-80	EGM08				
0	19	24	98	-116	EIGEN 6c4				
2	20	26	80	-146	GECO				
10	18	25	177	-125	PL_GEOID-2021 (GUGiK)				
4.8	18.2	23.8	103.0	-116.8	← (średnie)				

### Model aktualnie "urzędowy" PL-GEOID-2021 z innymi:

PL-GEOI	PL-GEOID-2021 (GUGiK) z: EGM08 (1), EIGEN 6c4 (2), GECO(3), GEOIDPOL_2021							
Średnia	Śr. abs	RMS	MAX	MIN	MODEL			
[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]				
-3	20	28	120	-202	EGM08			
-10	20	26	84	-199	EIGEN 6c4			
-8	20	27	97	-207	GECO			
-10	18	25	125	-177	GEOIDPOL-2021			
-7.8	19.5	26.5	139.0	-196.2	← (średnie)			

# Numeryczny model quasigeoidy GEOIDPOL-2021



Interpolacja w "oczku" siatki - biliniowa



Szkic izolinii quasigeoidy GEOIDPOL-2021 (zakres w szerokości I długości geodezyjnej "obcięto" na szkicu o 1°

#### LITERATURA (do problematyki referatu)

Barlik M. (1995): Wstęp do teorii figury Ziemi. Oficyna Wydawnicza PW. Warszawa

**Barthelmes F.** (2013): Definition of Functionals of the Geopotential and Their Calculation from Spherical Harmonic Models theory and formulas used by the calculation service of the International Centre for Global Earth Models (ICGEM) <u>http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/Scientific\_Technical\_Report STR09/02</u>. Revised Edition , January 2013

Bosy J. (2012): Wyniki weryfikacji wyników integracji podstawowej osnowy geodezyjnej na obszarze kraju ze stacjami referencyjnymi systemu ASG-EUPOS. Wrocław, 30 listopada 2011r. Raport dla GUGiK – Warszawa 2012

Czarnecki K. (1994): Geodezja współczesna w zarysie. Wiedza i Życie, Warszawa. ISBN 83-86805-67-6

Dwulit P. (2016): Geodezja Fizyczna. Wydawnictwo GALL - Katowice. ISBN 978-83-60968-42-0.

Forsberg R. Sideris M.G. (1993) Geoid computations by the multi-band spherical FFT approach. Bulletin Geodesique, 59, p. 342-360.

**Gilardoni M., Reguzzoni M., Sampietro D.** (2016): GECO: a global gravity model by locally combining GOCE data and EGM2008, Studia Geophysica et Geodaetica, vol. 60 (2016), pages 228-247).

Hassouna R.M.K. (2014): Towards the expansion of orthometric correction in spherical harmonics. Journal of Geomatics, Vol. 8, No. 2, October 2014.

**Heck B.** (1991): Tidal corrections in geodetic height determination. In (Linkwitz K., Eisele V., Moenicke H-J. – editors) Applications of Geodesy to Engineering. Symposium No 108. Stuttgart, Germany, May 13-17,1991, p.11-24.

Heiskanen W.A., and Moritz H. (1967): Physical Geodesy. Freeman, San Francisco. Moritz, H. (1980) Advanced Physical Geodesy. Wichmann, Karlsruhe.

**Hirt C.** (2011): Assessment of EGM2008 over Germany using accurate quasi-geoid heights from vertical deflections, GCG05 and GPS/levelling. Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement (zfv) 136(3): 138-149.

Holmes, S.A. and Featherstone W.E., 2002. A unified approach to the Clenshaw summation and the recursive computation of very-high degree and order normalised associated Legendre functions, Journal of Geodesy 76(5), 279–299,

Jaworski L. i in. (2012) : Zintegrowanie podstawowej osnowy geodezyjnej na obszarze Polski ze stacjami referencyjnymi systemu ASG-EUPOS ETAP IV. Opracowanie i wyrównanie obserwacji GNSS. Raport CBK dla GUGiK, Warszawa, lipiec - 2012 [Pomiary wykonane przez Konsorcjum: OPGK sp. z o.o. w Lublinie Sp. z o.o. (lider), CBK-Warszawa – wykonanie prac w etapie IV, PPGK S.A.- Warszawa, PPG Sp. z o. o. -Warszawa, OPGK w Łodzi Sp. z o.o., PMG Sp z o.o., Katowice]

#### LITERATURA c.d.

Kadaj R. (2001): Weryfikacja wyznaczenia modelu geoidy niwelacyjnej 2001 przez zastosowanie innej metody modelowania numerycznego i porównania wyników. Sprawozdanie techniczne z realizacji umowy nr 25/2001/GD. Raport dla GUGiK, Warszawa.

Kadaj R., Świętoń T. (2012): Program TRANSPOL v. 2.06. i modele danych przestrzennych www.gugik.gov.pl

Kadaj R. (2011): Program GEOIDPOL CN. www.geonet.net.pl

**Kryński J.** (2007): Precyzyjne modelowanie quasigeoidy na obszarze Polski – wyniki i ocena dokładności. Warszawa, IGiK, 2007, ISBN: 978-83-60024-11-9

**Kryński J., Kloch-Główka G.** (2009): Evaluation of the Performance of the New EGM2008 Global Geopotential Model over Poland. Geoinformation Issues, Vol. 1, No 1, 7-17/2009.

Liang W., Li J., Xu X., Zhang S., Zhao Y. (2020): A High-Resolution Earth 's Gravity Field Model SGG-UGM-2 from GOCE, GRACE, Satellite Altimetry, and EGM2008, Engineering, Volume 6, Issue 8, August 2020, Pages 860-878).

**Łyszkowicz A., Forsberg R.** (1995): Gravimetric Geoid for Poland Area Using Spherical FFT, Artificial Satellites, Vol. 29, No 1, Planetary Geodesy No 21, pp1-11.

**Łyszkowicz A.** (1996): Raport z realizacji umowy 38/CBK/97 pomiędzy Głównym Urzędem Geodezji i Kartografii a CBK PAN dotyczący utworzenia dla potrzeb GUGiK systemu obliczania odstępów quasigeoidy model QUASI96 od elipsoidy GRS80 dla obszaru Polski. CBK-PAN Warszawa.

**Łyszkowicz A.** (2000): Improvement of the quasigeoid model in Poland by GPS and levelling data. Artificial Satellites, Journal of Planetary Geodesy. Vol. 35, No 1, pp. 3-8.

Łyszkowicz A. (2012a): Geoid in the area of Poland in the author's investigations. Technical Sciences, No 15(1), 2012.

Łyszkowicz A. (2012b): Geodezja Fizyczna. Wydawnictwa Uniwersytetu Warmińsko – Mazurskiego. ISBN 978-83-7299-771-5.

**Łyszkowicz A., Kuczyńska-Siehień J., Biryło M.** (2014): Preliminary unification of Kronstadt86 local vertical datum with global vertical datum. Reports on Geodesy and Geoinformatics vol. 97 /2014; pages 103-111, DOI: 10.2478/rgg-2014-0015

#### LITERATURA c.d.

Łyszkowicz A., Nastula J., Zieliński J.B., Biryło M. A. (2021): New Model of Quasigeoid for the Baltic Sea Area. Remote Sens. 2021, 13, 2580. https://doi.org/10.3390/rs13132580

**Moritz H.** (2000): Molodensky's Theory and GPS in: Moritz H and Yurkina M.I. – editors: M. S. Molodensky In Memoriam. Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz Folge 88 Graz, 2000

**Ophaug V., Gerlach Ch**. (2020): Error propagation in regional geoid computation using spherical splines, least-squares collocation, and Stokes 's formula. Journal of Geodesy (2020) 94:120, <u>https://doi.org/10.1007/s00190-020-01443-y</u>

**Osada E.** (2001): Wyznaczenie modelu geoidy niwelacyjnej QGEOID / PL01 i modelu odchyleń pionu DEFLEC / 01 na podstawie pomiarów satelitarnych i pomiarów wysokościowych osnowy geodezyjnej. Raport techniczny z realizacji umowy nr 1/2001/GD z GUGIK. Warszawa 2001.

Osada E. (2014): Geodezja - Teoria i Praktyka. Wydawnictwo UxLan Wrocław 2014. ISBN 978-83-60221-10-5.

Pavlis N.K., Holmes S.A., Kenyon S.C., and Factor J.K. (2008): An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008, presented at the 2008 General Assembly of the European Geosciences Union, Vienna, Austria, April 13–18, 2008.

Pażus R., Osada E., Olejnik S. (2002): Geoida Niwelacyjna 2001, Geodeta 5/2002.

**Perovych L., Perovych I, Gorlachuk V.** (2020): On the reduction of geodetic and gravimetric measurements on technogenic and geodynamic polygons. GEODESY AND CARTOGRAPHY, Polish Academy of Sciences Vol. 69, No. 1, 2020, pp. 65–72, <a href="https://doi.org/10.24425/gac.2020.131074">https://doi.org/10.24425/gac.2020.131074</a>

Siders M. G. (2012): Geoid Determination by FFT Techniques. Department of Geomatics Engineering University of Calgary. Part of the Lecture Notes in Earth System Sciences book series (LNESS, volume 110). Springer Link.

Torge W. (2001): Geodesy. Walter de Gruyter, Berlin, New York.

Torge W. (1989): Gravimetry. 3-edycja, Walter de Gruyter, Berlin, New York.

**Trojanowicz M.** (2009): Ocena dokładności globalnych modeli geopotencjału EGM96 I EGM08 na obszarze Dolnego Śląska. Acta Sci. Pol., Geodesia et Descriptio Terrarum 8(1) 2009, 19-30.

Zingererle P., Wiadro R., Gruber T., Oikonomidou X. (publikacja: *"The combined global gravity field model XGM2019e"*, Journal of Geodesy (2020) 94:66, <u>https://doi.org/10.1007/s00190-020-01398-0</u>)

# Dziękuję za uwagę

Roman Kadaj Katedra Geodezji i Geotechniki PRZ kadaj@prz.edu.pl