



UNIwersytet
Przyrodniczy
we Wrocławiu

Opracowanie modelu quasi-geoidy dopasowanej do danych GNSS/niwelacyjnych dla obszaru Polski metodą GGI Model PL-geoid2021

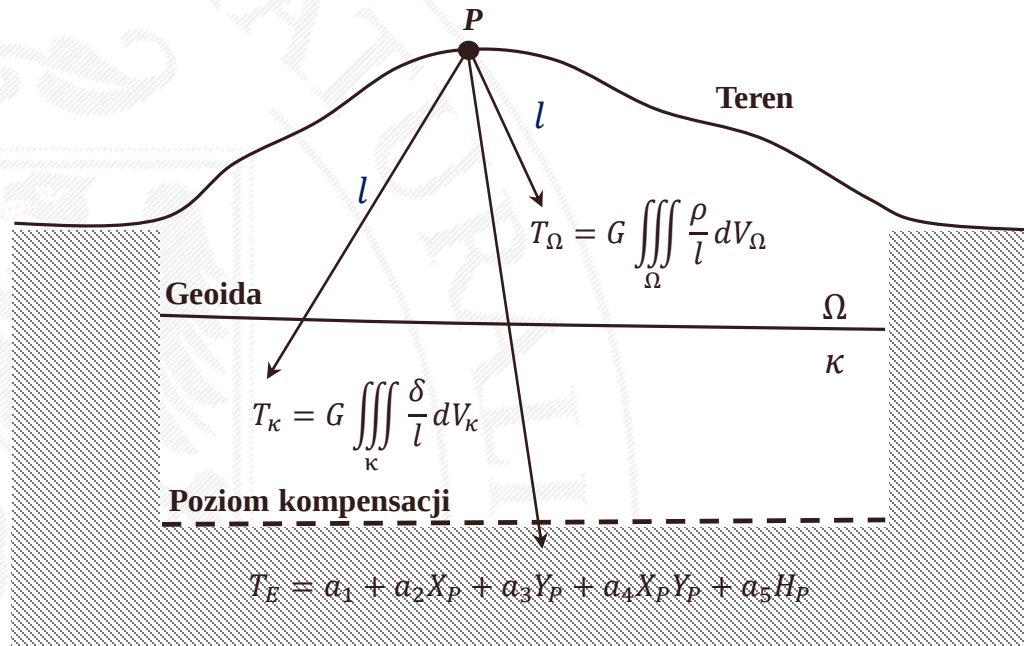
Marek Trojanowicz, Magdalena Owczarek-Wesołowska
Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

Model został przygotowany w ramach przeprowadzonego przez GUGiK konkursu na opracowanie modelu quasi-geoidy służącej do przeliczeń wysokości elipsoidalnych do układu PL-EVRF2007-NH

Plan prezentacji

1. Metoda GGI – koncepcja modelu potencjału zakłócającego
2. Model quasi-geoidy grawimetrycznej i dopasowanej
3. Wykorzystane dane i procedura realizacji obliczeń
4. Przeprowadzone analizy i ich wyniki
5. Końcowy model quasi-geoidy

Metoda GGI – model potencjału zakłócającego



$$T_P = T_{\Omega} + T_{\kappa} + T_E$$

G - stała grawitacji,
 ρ i δ - funkcje rozkładu gęstości
w objętościach Ω i κ ,
 dV_{Ω} i dV_{κ} - różniczkowe
przyrosty objętości Ω i κ ,
 l - odległość pomiędzy masą
przyciągającą a punktem P

Poszukiwane parametry modelu:

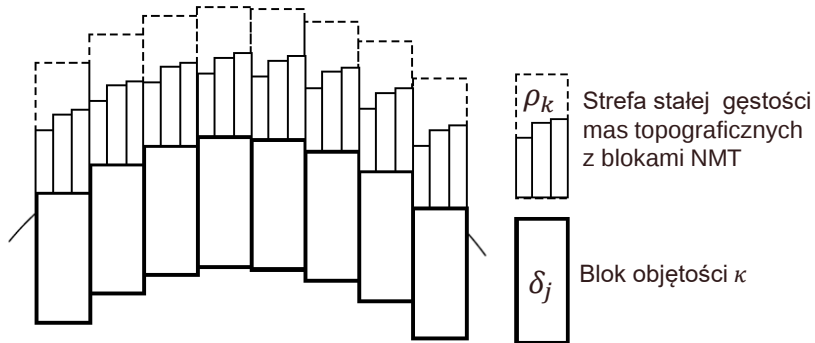
- Dyskretne funkcje rozkładu gęstości ρ i δ
- Współczynniki wielomianów a_1, a_2, a_3, a_4, a_5

Podstawowe dane:

- GNSS/niwelacyjne anomalie wysokości
- Zakłócenia lub anomalie grawimetryczne

Metoda GGI – model potencjału zakłócającego

Podział na strefy/bloki stałych gęstości



Referencyjny model gęstości dla objętości Ω i κ ,

$$\rho_0, \delta_0$$

ρ_0 - z reguły wartość stała,

δ_j^0 - równoważy masę strefy k położonej bezpośrednio nad blokiem j

$$\delta_j^0 = -\frac{H_i \rho_0}{h_j}$$

Równania obserwacyjne

$$\begin{aligned} T + v_T &= \mathbf{f}^T \mathbf{dx} + T_0, & T_0 &= \mathbf{f}^T \mathbf{x}_0 \\ \delta g + v_{\delta g} &= -\mathbf{f}_z^T \mathbf{dx} + \delta g_0, & \delta g_0 &= -\mathbf{f}_z^T \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

Układ równań poprawek

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{dx} - \mathbf{L}, \quad \mathbf{P}$$

Warunek wynikający z niejednoznaczności inwersji

$$\mathbf{dx}^T \mathbf{W}_x \mathbf{dx} = \min$$

$\mathbf{W}_x$ – macierz wag gęstości zależna od głębokości

Funkcja celu: $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} + \mathbf{dx}^T \mathbf{W}_x \mathbf{dx} = \min$

Rozwiązanie: $\mathbf{dx} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{W}_x)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L}$

Wyznaczenie wektora parametrów modelu:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{dx}$$

Oraz potrzebne charakterystyki pola grawitacyjnego:

$$T_{GGI} = \mathbf{f}^T \mathbf{x}$$

$$W_{GGI} = U + T_{GGI}$$

Metoda GGI – model potencjału zakłócającego

GGM wykorzystywany jest w technice **RCR**

1. Usunięcia składowej globalnej z danych pomiarowych

$$\delta T_r = T - T_{GM} = W - W_{GM}$$

$$\delta g_r = g - g_{GM}$$

2. Budowa rezyduального modelu potencjału zakłócającego

$$\delta T_{rGGI} = \delta T_E + \delta T_\Omega + \delta T_\kappa$$

3. Wyznaczenie składowej rezydualnej, globalnej oraz wartości potencjału dla punktów nowych

$$W_{GGI} = W_{GM} + \delta T_{rGGI}$$

Na podstawie wartości potencjału siły ciężkości wyznaczone są anomalie wysokości

$$\zeta_{GGI} = \frac{W_{GGI} - U}{\gamma_Q} = \frac{T_{GM} + \delta T_{rGGI}}{\gamma_Q} = \frac{T_{GGI}}{\gamma_Q}$$

Taki model jest modelem dopasowanym do wykorzystanych GNSS/niwelacyjnych anomalii wysokości

Model GGI dopasowany do GGM - **model grawimetryczny**

Przyjmujemy jako obserwacje wartości potencjału z GGM

$$W = W_{GM} \quad (\delta T_r = 0)$$

Prowadzi do prostego zapisu równań poprawek

$$v_T = \mathbf{f}^T \mathbf{dx} + T_0$$

Do budowy takich równań nie musimy wyznaczać wartości z GGM (wystarczy określenie położenia wybranych punktów).

Dla danych grawimetrycznych równania pozostają bez zmian, podobnie jak cały algorytm.

$$\zeta_{GGI} = \frac{W_{GGI} - U}{\gamma_Q} = \frac{T_{GM} + \delta T_{rGGI}}{\gamma_Q} = \frac{T_{GGI}}{\gamma_Q}$$

Dla modelu grawimetrycznego wprowadzana jest poprawka

– $\frac{\Delta W_o}{\gamma_Q}$ wynikająca z różnicy $\Delta W_o = W_o - U_o$

Ostatecznie zapiszemy

$$\zeta_{Graw} = \zeta_{GGI} + \zeta_o = \zeta_{GGI} - \frac{\Delta W_o}{\gamma_Q}$$

Metoda GGI – warianty modeli quasi-geoidy

Model dopasowany do danych GNSS/niwelacyjnych

Dane pomiarowe:

- Dane grawimetryczne
- Anomalie wysokości z pomiarów GNSS/niwelacyjnych

Model GGM wykorzystany w technice RCR

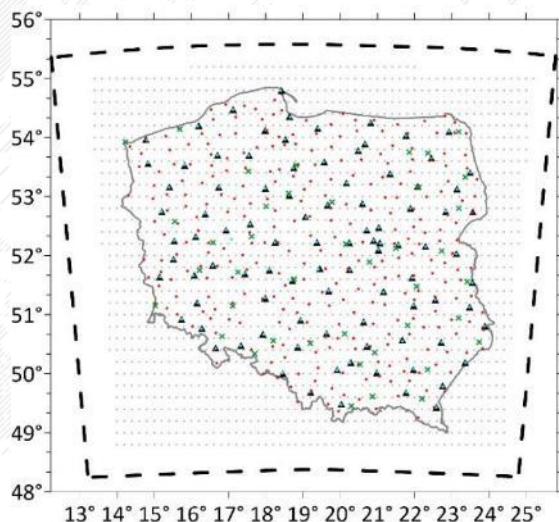
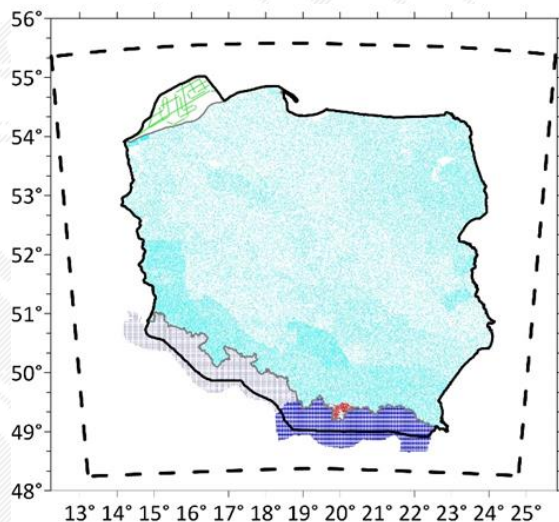
Model grawimetryczny (dopasowany do GGM)

Dane pomiarowe:

- Dane grawimetryczne
- Anomalie wysokości z modelu GGM

Model GGM wykorzystany w technice RCR

Wykorzystane dane



DANE GRAWIMETRYCZNE

68663 punktów grawimetrycznych, w tym:

- 55497 punkty ze zbioru Państwowego Instytutu Geologicznego (kolor jasnoniebieski),
- 2083 punkty z obszaru Czech, (kolor niebieski)
- 8779 punktów z obszaru Słowacji, (kolor ciemno-niebieski)
- 516 punktów ze zbiorów Politechniki Warszawskiej (kolor czerwony)
- 1788 punktów ze zbiorów Politechniki Gdańskiej (kolor zielony)

DANE GNSS/NIWELACYJNE

- ASG_Stacje – 94 punkty (czarne trójkąty)
- ASG_Ekscentry – 95 punktów (jasnoniebieskie kropki)
- POLREF – 297 punktów (czerwone kropki)
- EUVN – 42 punkty (zielone krzyże)
- Regularna siatka 1820 punktów przyjętych jako obserwacje do budowy modelu grawimetrycznego (szare kropki)

Układ dla wysokości elipsoidalnych:

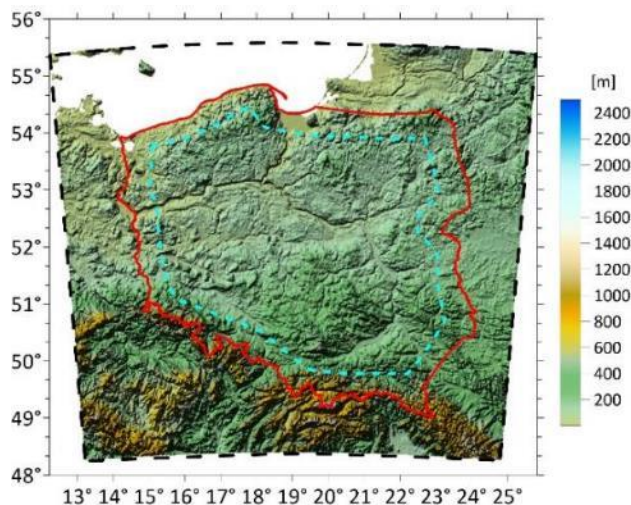
ASG, POLREF – PL-ETRF2000-GRS80H (ETRF2000 na epokę 2011.0)

EUVN – ITRF2005 epoka 2011.0

Układ dla wysokości normalnych: PL-EVRF2007-NH

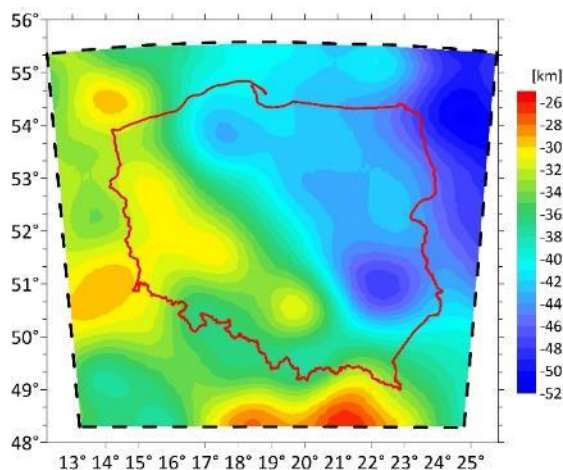
Wykorzystane dane

INNE WYKORZYSTANE DANE



Na podstawie modelu SRTM v4.1 przygotowano trzy numeryczne modele terenu wykorzystane bezpośrednio w obliczeniach:

- Model o rozdzielczości 100×100m – obejmujący tereny górskie południowej części Polski do szerokości 52°.
- Model o rozdzielczości 500×500m – obejmujący tereny nizinne północnej części Polski (szerokości wyższe od 52°).
- Model o rozdzielczości 1000×1000m – obejmujący obszar budowy modelu GGI.



Model głębokości Moho dla
Europy, który wykorzystano do
zdefiniowania objętości κ

Globalny model geopotencjału

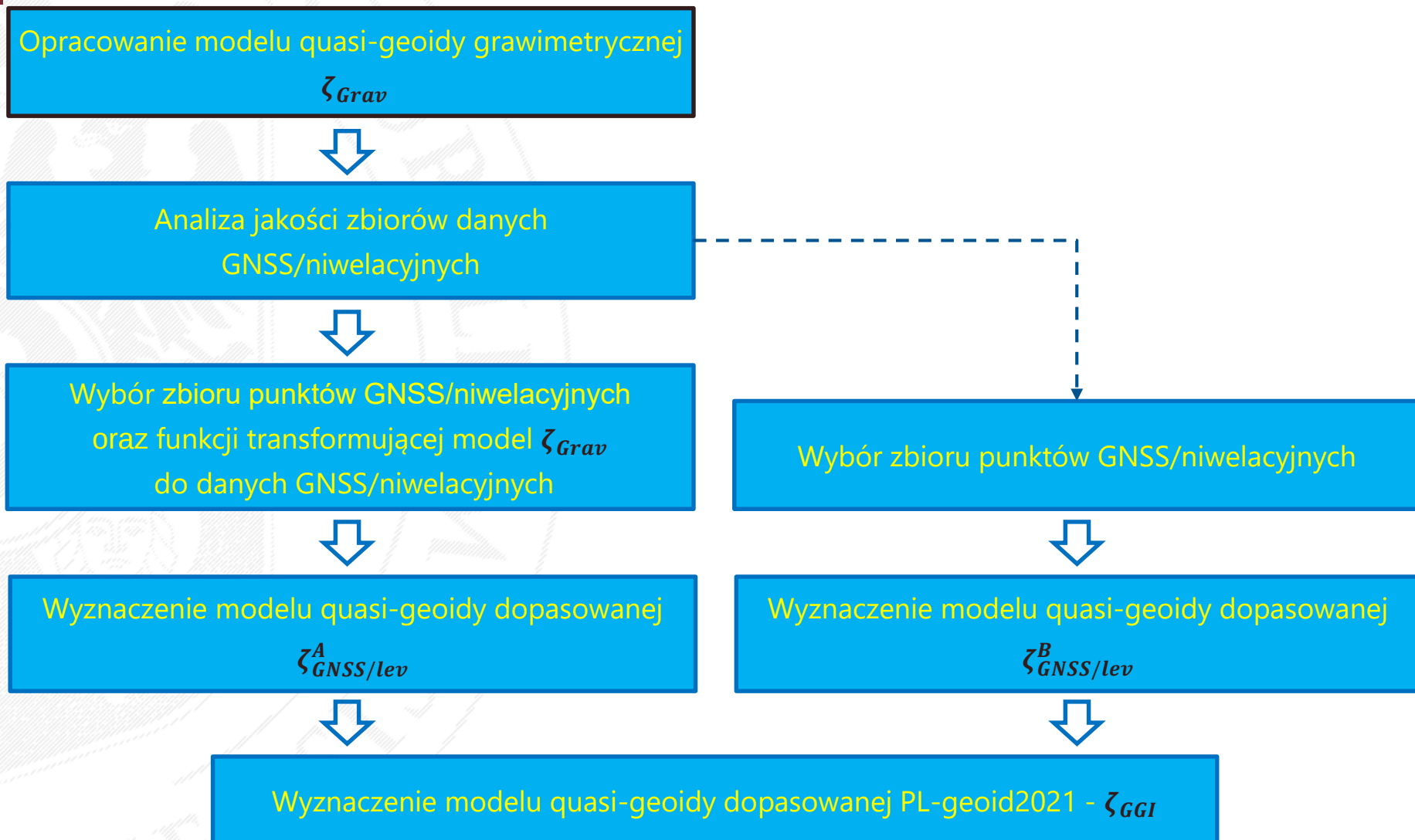
SGG-UGM-2

do stopnia i rzędu 2190

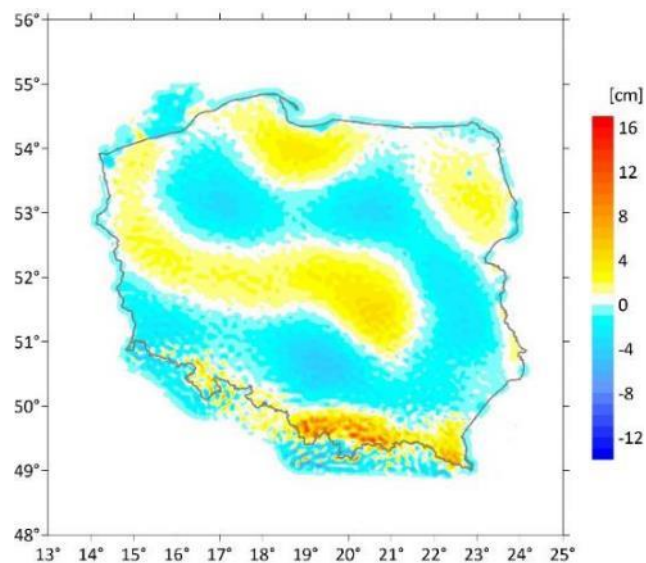
$$W_{0E} = 62636857.28 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

Ilde i in. (2006), *European Vertical Reference System (EVRS) 2007 – a Combination of UELN and ECGN*, EUREF Symposium 2006, Riga, June 2006

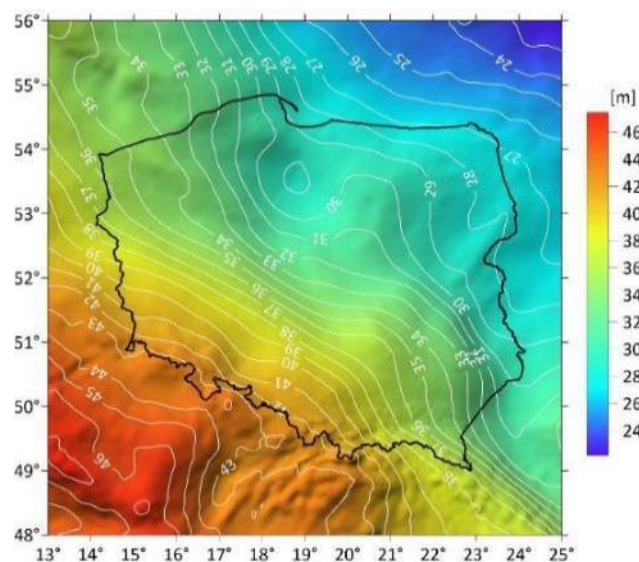
Schemat przeprowadzonych obliczeń



Model quasi-geoidy grawimetrycznej (ζ_{Grav})



Różnice pomiędzy modelem ζ_{Grav}
a modelem quasi-geoidy wyznaczonym na podstawie
modelu globalnego SGG-UGM-2

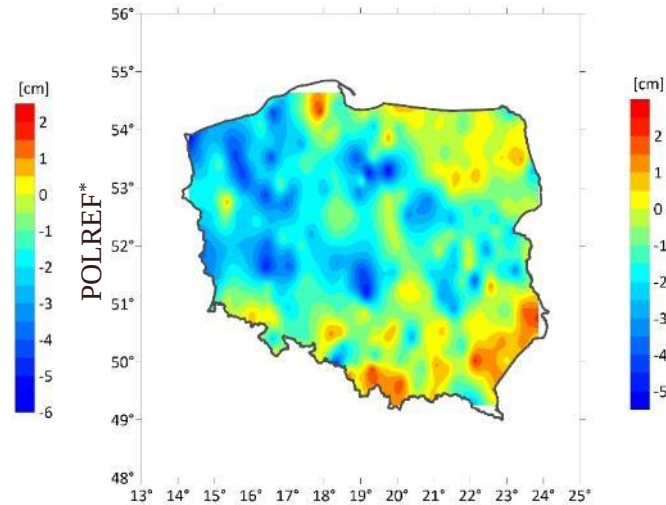
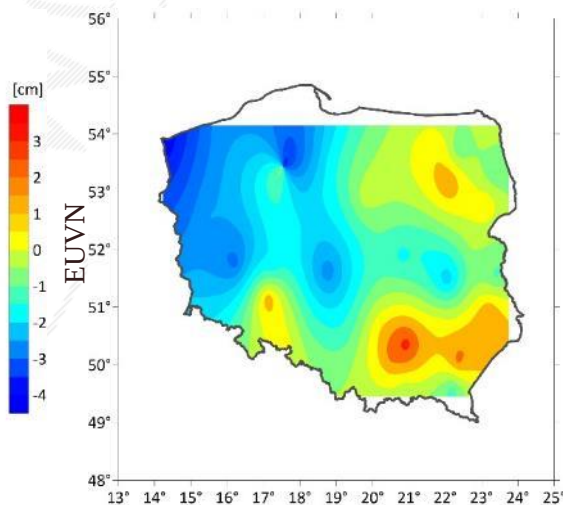
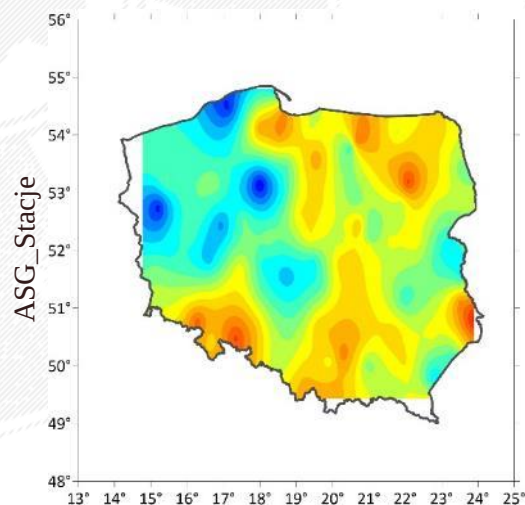


Model ζ_{Grav}

Model quasi-geoidy grawimetrycznej (ζ_{Grav})

Najważniejsze statystyki różnic $\Delta\zeta = \zeta_{GNSS/lev} - \zeta_{Grav}$.

Oznaczenie sieci	$min(\Delta\zeta)$	$max(\Delta\zeta)$	Range	$\Delta\zeta_{mean}$	$stdev(\Delta\zeta)$
	[cm]				
ASG_Stacje	-4.1	3.2	7.3	-0.3	1.40
ASG_Ekscentry	-3.4	2.5	5.9	-0.5	1.23
EUVN	-5.6	1.7	7.3	-1.1	1.66
POLREF	-21.7	6.5	28.3	-1.2	2.16
POLREF*	-5.4	2.3	7.7	-1.2	1.54



Modele quasi-geoidy dopasowanej $\zeta_{GNSS/lev}^A$ oraz $\zeta_{GNSS/lev}^B$

Model $\zeta_{GNSS/lev}^A$

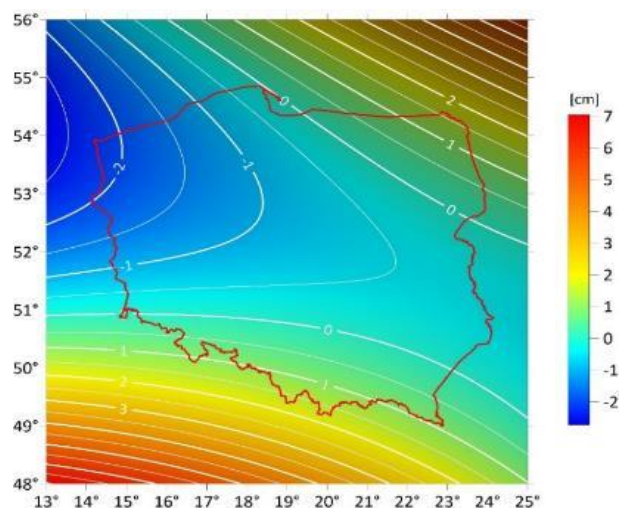
Punkty GNSS/niwelacje:

- ASG_Stacje
- ASG_Ekscentry

Model transformacji:

$$\zeta_{GNSS/lev}^A = \zeta_{Grav} + a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy$$

Poprawki transformujące:



Model $\zeta_{GNSS/lev}^B$

Punkty GNSS/niwelacje:

- POLREF*

Najważniejsze statystyki różnic:

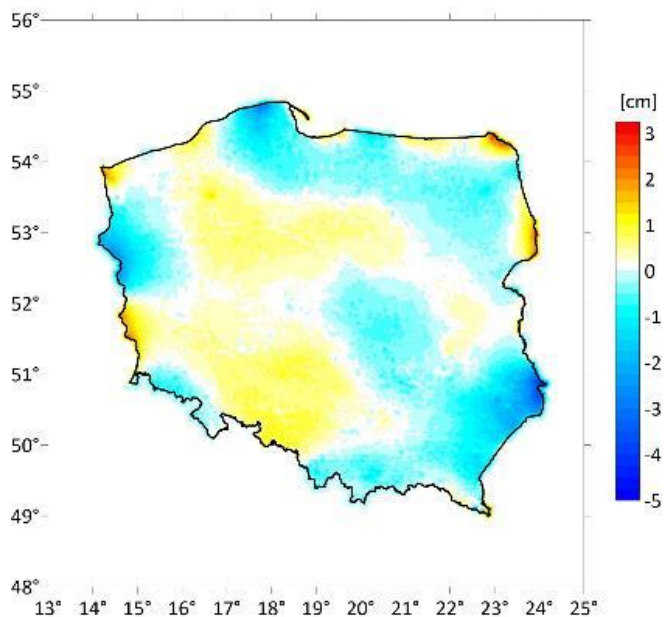
$$\Delta\zeta = \zeta_{GNSS/lev} - \zeta_{GNSS/lev}^A - \text{kolor czarny}$$

$$\Delta\zeta = \zeta_{GNSS/lev} - \zeta_{GNSS/lev}^B - \text{kolor niebieski}$$

Oznaczenie sieci	Range	$\Delta\zeta_{mean}$	$stdev(\Delta\zeta)$
	[cm]		
ASG_Stacje	6.7 (6.0)	0.1 (1.0)	1.21 (1.18)
ASG_Ekscentry	6.3 (5.3)	-0.1 (0.7)	1.03 (0.96)
EUVN	5.2 (4.9)	-0.8 (0.2)	1.27 (1.11)
POLREF*	8.9 (6.6)	-0.8 (0.0)	1.32 (1.08)

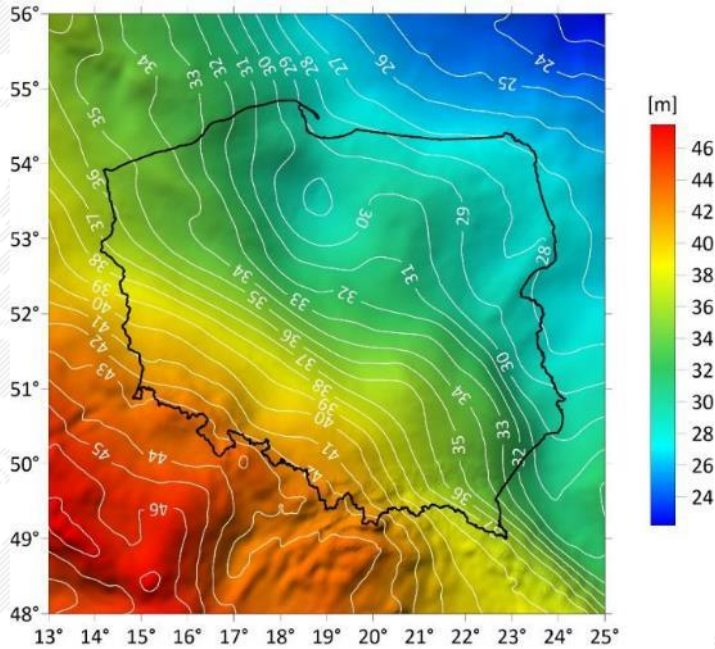
Modele quasi-geoidy dopasowanej $\zeta_{GNSS/lev}^A$ oraz $\zeta_{GNSS/lev}^B$

Różnice $\Delta\zeta = \zeta_{GNSS/lev}^A - \zeta_{GNSS/lev}^B$



	[cm]
$\min(\Delta\zeta)$	-4.74
$\max(\Delta\zeta)$	2.92
$Range$	7.66
$\Delta\zeta_{mean}$	-0.01
$stdev(\Delta\zeta)$	0.40

Opracowanie końcowego modelu quasi-geoidy



Jako końcowe w punktach na terytorium Polski przyjęto wartości średnie z modeli A i B zgodnie z równaniem:

$$\zeta_{GGI} = (\zeta_{GNSS/lev}^A + (\zeta_{GNSS/lev}^B - 0.0085m))/2$$

Poza granicami Polski ostateczne anomalie wysokości przyjęto z modelu A:

$$\zeta_{GGI} = \zeta_{GNSS/lev}^A$$

Model ten został przyjęty jako model **PL-geoid2021**

$\min(\zeta_{GGI})$	$\max(\zeta_{GGI})$	$Range(\zeta_{GGI})$	$\zeta_{GGI_{mean}}$	$stdev(\zeta_{GGI})$
[m]				
22.212	47.466	25.254	34.834	6.430

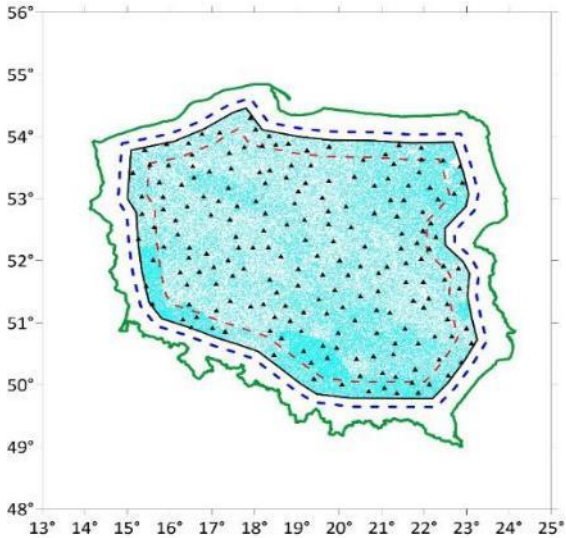
Oznaczenie sieci	$\min(\Delta\zeta)$	$\max(\Delta\zeta)$	$Range$	$\Delta\zeta_{mean}$	$stdev(\Delta\zeta)$
[cm]					
ASG_Stacje	-3.0	2.5	5.5	0.1	1.16
ASG_Ekscentry	3.3	1.9	5.2	-0.1	0.95
EUVN	-3.4	1.6	5.0	-0.7	1.16
POLREF*	-5.6	2.3	7.9	-0.8	1.17

Najważniejsze statystyki różnic

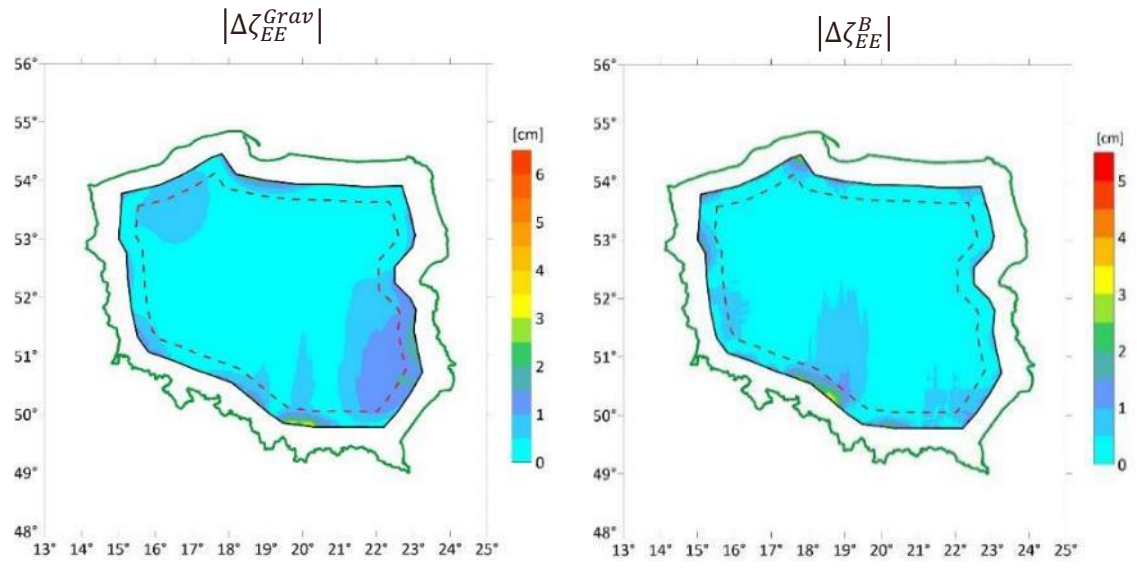
$$\Delta\zeta = \zeta_{GNSS/lev} - \zeta_{GGI}$$

Oszacowanie efektu brzegowego

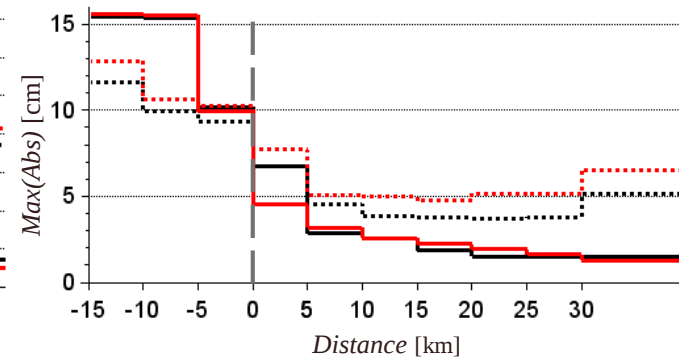
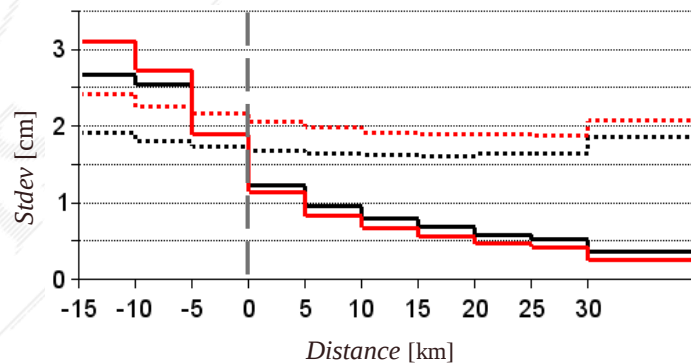
Wykorzystane dane



Mapy powierzchniowych rozkładów wartości bezwzględnych różnic



$\Delta\zeta_{EE}^{Grav} = \zeta_{Grav} - \zeta_{EE}^{Grav}$
 $\Delta\zeta_{EE}^B = \zeta_{GNSS/lev}^B - \zeta_{EE}^{GNSS/lev}$
 $\Delta\zeta_{GGM}^{Grav} = \zeta_{Grav} - \zeta_{GGM}$
 $\Delta\zeta_{GGM}^B = \zeta_{GNSS/lev}^B - \zeta_{GGM}$



Podsumowanie

- Grawimetryczne modele geoidy i quasi-geoidy stanowią niezależne od sieci niwelacyjnych powierzchnie odniesienia i są niezbędnym elementem integracji i kontroli sieci GNSS i niwelacyjnych.
- Porównanie wykorzystanych w opracowaniu GNSS/niwelacyjnych anomalii wysokości z modelem quasi-geoidy grawimetrycznej wskazują na występowanie lokalnych różnic porównywanych wielkości, które mają charakter systematyczny.
- GNSS/niwelacyjne anomalie wysokości dla punktów sieci ASG-EUPOS wykazują również systematyczne przesunięcie względem punktów POLREF na poziomie 8 mm. Wykazane podobne różnice dla punktów EUVN należy jeszcze zweryfikować z uwagi na przyjęcie w obliczeniach wysokości elipsoidalnych w innym układzie.
- Wyznaczony model quasi-geoidy dopasowanej charakteryzuje się wysoką dokładnością. Ze względu na pokrycie obszaru opracowania danymi grawimetrycznymi model ten powinien być stosowany jedynie na obszarze Polski. Poza granicami model ten odpowiada wykorzystanemu modelowi globalnemu dopasowanemu do anomalii wysokości dla punktów sieci ASG-EUPOS.
- W strefie przygranicznej można spodziewać się nieco niższych dokładności modelu ze względu na tzw. efekt brzegowy. Jednak na całym obszarze kraju dokładność modelu powinna być wyższa od dokładności modelu globalnego.



UNIWERSYTET
PRZYRODNICZY
WE WROCŁAWIU



DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ

50-375 Wrocław
ul. Norwida 25

Centrala: tel. 71 320 5020
Kancelaria Ogólna: tel. 71 320 5130

www.upwr.edu.pl