



Kriging i kolokacja MNK – porównanie

Grybów, 08 czerwiec 2022

Marcin Ligas

Kriging



Daniel Gerhardus Krige

Kolokacja

A note on terminology. Why is this method called “collocation”? In numerical mathematics, interpolation is an approximation of an unknown function by fitting an approximate function (say, a polynomial) to discrete measured values of the unknown function. *Fitting an approximate function (say, a polynomial) to discrete measured functionals (derivatives, integrals,...) of the kernel function, has been called “collocation”. Where this name came in mathematics, I do not know. This is standard terminology in mathematics, and Torben Krarup, having been an excellent mathematician, knew of this terminology and used it in this abstract sense.* A later, more concrete, geodetic attempt of interpretation was to derive collocation from the Latin verb “*collocare*”, which means *bringing things together (con) at one place (locus)*, collecting and combining things. In our case this would mean “combining and adjusting various geodetic measurements”. This interpretation is more intuitive to a practical geodesist than the original mathematical meaning. *So, one may use both interpretations, or just use collocation for the method of Krarup, without bothering where the name came from.*

Working with Torben Krarup

Helmut Moritz, Graz. Presented at A Torben Krarup Workshop;

Aalborg University, October 13, 2006



AGH

Kriging i kolokacja MNK – porównanie



Porównanie przeprowadzone przy założeniu:

- » Skalarnych pól losowych
- » Prognozie (estymacji, filtrowaniu) podlega wielkość (częściowo) obserwowana a nie jej funkcja (funkcjonał).
- » Stacjonarności rzędu 2 (funkcja kowariancji istnieje)

$$\forall \mathbf{v} \in D \quad E[Z(\mathbf{v})] = \mu$$

$$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in D \quad Cov[Z(\mathbf{v}_1), Z(\mathbf{v}_2)] = E\{[Z(\mathbf{v}_1) - \mu] [Z(\mathbf{v}_2) - \mu]\} = C(\mathbf{h})$$



AGH

Kriging i kolokacja MNK – porównanie



H. Moritz



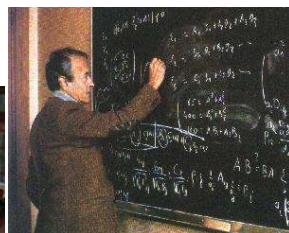
T. Krarup

Kolokacja
Geodezja '60

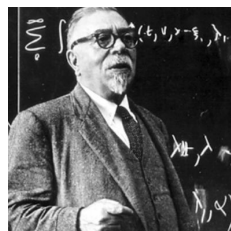


D. G. Krige

Kriging
Górnictwo i geologia '60



G. Matheron



N. Wiener



A. N. Kołmogorow

Procesy stochastyczne
Matematyka/Statystyka '40



C. R. Henderson

Liniowe modele mieszane
Hodowla zwierząt '50



L. S. Gandin



A. Eliassen

Analiza Obiektywna
Meteorologia '60



A. S. Goldberger

Najlepsza nieobciążona
predykcja liniowa (BLUP)
Ekonometria '60

Lista na pewno nie jest
wyczerpująca

**Prognoza dokładna**

$$\begin{cases} \mathbf{Z}(\mathbf{v}) = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{v}) + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \\ Z(\mathbf{v}_0) = \mu(\mathbf{v}_0) + \varepsilon(\mathbf{v}_0) \end{cases}$$

$$\hat{Z}_0 = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{Z} \quad (\text{SK})$$

stała (lub zależna od położenia) i znana wartość oczekiwana

$$\hat{Z}_0 = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{Z} \quad (\text{OK, UK})$$

stała i nieznana wartość oczekiwana; nieznana, zależna od położenia wartość oczekiwana (trend)

Prognoza filtrowana (trend + sygnał + szum)

$$\begin{cases} \mathbf{Z}(\mathbf{v}) = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{v}) + \mathbf{s}(\mathbf{v}) + \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \\ S(\mathbf{v}_0) = \mu(\mathbf{v}_0) + s(\mathbf{v}_0) \end{cases}$$

$$\hat{S}_0 = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{Z} \quad (\text{SK})$$

$$\hat{S}_0 = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{Z} \quad (\text{OK, UK})$$

$$\begin{aligned} E(e) &= 0, \quad E(ee^T) = E(e^2) \rightarrow \min \\ e &= \hat{Z}_0 - Z_0 \quad e = \hat{S}_0 - S_0 \end{aligned}$$

SK – kriging prosty, OK – kriging zwyczajny, UK – kriging uniwersalny

Kriging prosty



$$\begin{cases} \mathbf{Z} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon} = \mu \mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon} \\ Z_0 = \mu + \varepsilon_0 \end{cases}$$

Prognoza dokładna

Układ równań:

$$\boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\omega}_0$$

Jawna postać predyktora:

$$\hat{Z}_0 = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{Z} = \mu + \boldsymbol{\omega}_0^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} (\mathbf{Z} - \boldsymbol{\mu})$$

$$\hat{Z}_0 = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{Z} = \mathbf{x}_0^T \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\omega}_0^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} (\mathbf{Z} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta})$$

Wariancja prognozy:

$$\sigma_{SK}^2 = \sigma^2 - \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\omega}_0 = \sigma^2 - \boldsymbol{\omega}_0^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\omega}_0$$

$$\begin{cases} \mathbf{Z} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{s} + \boldsymbol{\epsilon} = \mu \mathbf{u} + \mathbf{s} + \boldsymbol{\epsilon} \\ S_0 = \mu + s_0 \end{cases}$$

Prognoza filtrowana

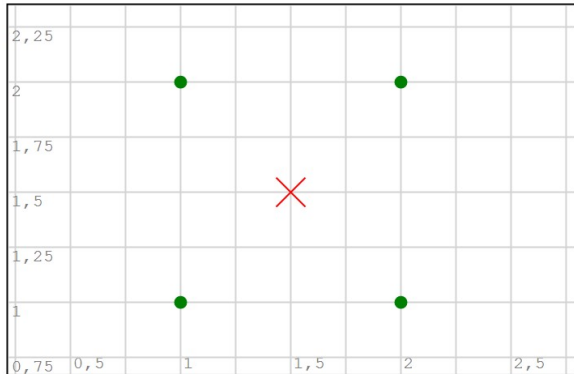
$$\boldsymbol{\Omega}_{ZZ} \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\omega}_{ss_0}$$

$$\hat{S}_0 = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{Z} = \mu + \boldsymbol{\omega}_{ss_0}^T \boldsymbol{\Omega}_{ZZ}^{-1} (\mathbf{Z} - \boldsymbol{\mu})$$

$$\hat{S}_0 = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{Z} = \mathbf{x}_0^T \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\omega}_{ss_0}^T \boldsymbol{\Omega}_{ZZ}^{-1} (\mathbf{Z} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta})$$

$$\sigma_{FSK}^2 = \sigma_s^2 - \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\omega}_{ss_0} = \sigma_s^2 - \boldsymbol{\omega}_{ss_0}^T \boldsymbol{\Omega}_{ZZ}^{-1} \boldsymbol{\omega}_{ss_0}$$

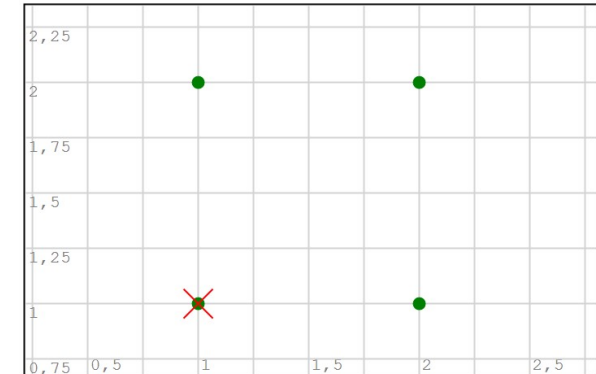
Szybki przykład (prognoza dokładna)



x	y	z
1	1	10
1	2	11
2	2	10,4
2	1	12

$$C(h; c_0; c; a) := \begin{cases} \text{if } h > 0 \\ C := c \cdot \exp\left(-\frac{h}{a}\right) \\ \text{else} \\ C := c_0 + c \\ C \end{cases}$$

$$c_0 := 0,05 \quad c := 0,95 \quad a := 3,15$$



$$D = \begin{bmatrix} 0,0000 & 1,0000 & 1,4142 & 1,0000 \\ 1,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 1,4142 \\ 1,4142 & 1,0000 & 0,0000 & 1,0000 \\ 1,0000 & 1,4142 & 1,0000 & 0,0000 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0,7071 \\ 0,7071 \\ 0,7071 \\ 0,7071 \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,6916 & 0,6064 & 0,6916 \\ 0,6916 & 1,0000 & 0,6916 & 0,6064 \\ 0,6064 & 0,6916 & 1,0000 & 0,6916 \\ 0,6916 & 0,6064 & 0,6916 & 1,0000 \end{bmatrix} \quad \omega = \begin{bmatrix} 0,759 \\ 0,759 \\ 0,759 \\ 0,759 \end{bmatrix}$$

Prognoza:

$$Z_0 := \omega^T \cdot \Omega^{-1} \cdot Z = [11,0183]$$

Wariancja prognozy:

$$V_0 := (c_0 + c) - \omega^T \cdot \Omega^{-1} \cdot \omega = [0,2292]$$

$$D = \begin{bmatrix} 0,0000 & 1,0000 & 1,4142 & 1,0000 \\ 1,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 1,4142 \\ 1,4142 & 1,0000 & 0,0000 & 1,0000 \\ 1,0000 & 1,4142 & 1,0000 & 0,0000 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 1,0000 \\ 1,4142 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,6916 & 0,6064 & 0,6916 \\ 0,6916 & 1,0000 & 0,6916 & 0,6064 \\ 0,6064 & 0,6916 & 1,0000 & 0,6916 \\ 0,6916 & 0,6064 & 0,6916 & 1,0000 \end{bmatrix} \quad \omega = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,6916 \\ 0,6064 \\ 0,6916 \end{bmatrix}$$

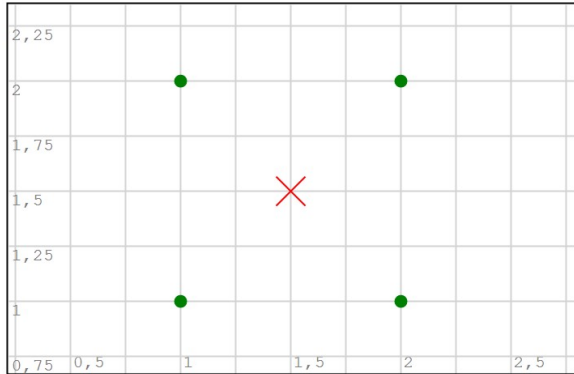
Prognoza:

$$Z_0 := \omega^T \cdot \Omega^{-1} \cdot Z = [10]$$

Wariancja prognozy:

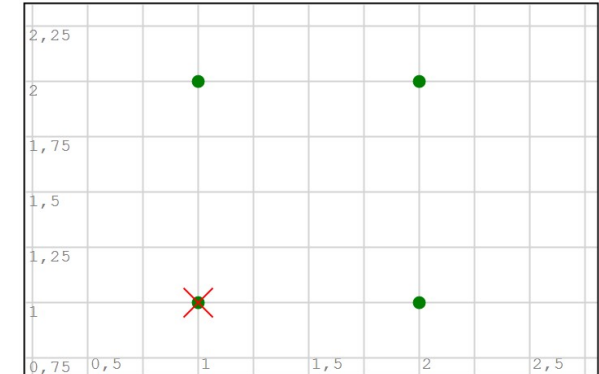
$$V_0 := (c_0 + c) - \omega^T \cdot \Omega^{-1} \cdot \omega = [0]$$

Szybki przykład (prognoza filtrowana)



x	y	z
1	1	10
1	2	11
2	2	10,4
2	1	12

$$C(h; c_0; c; a) := \begin{cases} \text{if } h > 0 \\ C := c \cdot \exp\left(-\frac{h}{a}\right) \\ \text{else} \\ C := c_0 + c \\ C \end{cases}$$



$$c_0 := 0,05 \quad c := 0,95 \quad a := 3,15$$

$$D = \begin{bmatrix} 0,0000 & 1,0000 & 1,4142 & 1,0000 \\ 1,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 1,4142 \\ 1,4142 & 1,0000 & 0,0000 & 1,0000 \\ 1,0000 & 1,4142 & 1,0000 & 0,0000 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0,7071 \\ 0,7071 \\ 0,7071 \\ 0,7071 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_Z = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,6916 & 0,6064 & 0,6916 \\ 0,6916 & 1,0000 & 0,6916 & 0,6064 \\ 0,6064 & 0,6916 & 1,0000 & 0,6916 \\ 0,6916 & 0,6064 & 0,6916 & 1,0000 \end{bmatrix} \quad \omega_s = \begin{bmatrix} 0,759 \\ 0,759 \\ 0,759 \\ 0,759 \end{bmatrix}$$

Prognoza:

$$S_0 := \omega_s^T \cdot \Omega_Z^{-1} \cdot Z = [11,0183]$$

Wariancja prognozy

$$V_0 := c - \omega_s^T \cdot \Omega_Z^{-1} \cdot \omega_s = [0,1792]$$

$$D = \begin{bmatrix} 0,0000 & 1,0000 & 1,4142 & 1,0000 \\ 1,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 1,4142 \\ 1,4142 & 1,0000 & 0,0000 & 1,0000 \\ 1,0000 & 1,4142 & 1,0000 & 0,0000 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 1,0000 \\ 1,4142 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_Z = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,6916 & 0,6064 & 0,6916 \\ 0,6916 & 1,0000 & 0,6916 & 0,6064 \\ 0,6064 & 0,6916 & 1,0000 & 0,6916 \\ 0,6916 & 0,6064 & 0,6916 & 1,0000 \end{bmatrix} \quad \omega_s = \begin{bmatrix} 0,9500 \\ 0,6916 \\ 0,6064 \\ 0,6916 \end{bmatrix}$$

Prognoza:

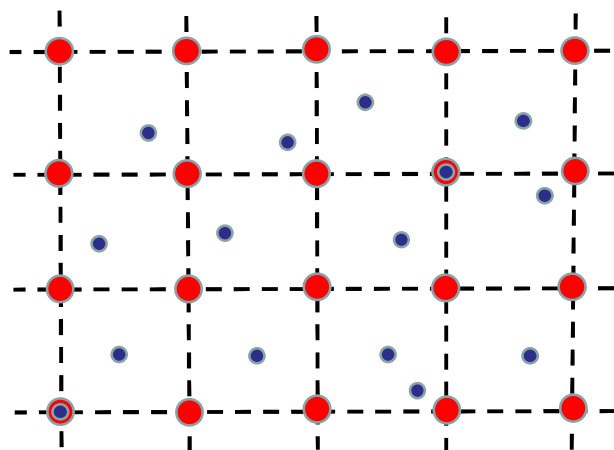
$$S_0 := \omega_s^T \cdot \Omega_Z^{-1} \cdot Z = [9,9896]$$

Wariancja prognozy:

$$V_0 := c - \omega_s^T \cdot \Omega_Z^{-1} \cdot \omega_s = [0,0438]$$

Kriging i kolokacja MNK – porównanie

	Prognoza dokładna	Prognoza filtrowana
Na punktach danych (obserwacje)	Prognozowana wartość identyczna z obserwowaną. Wariancja prognozy równa zero.	Prognozowana wartość różna od obserwowanej. Wariancja prognozy większa od zero.
Na punktach „nowych”	Prognozowane wartości identyczne dla dwóch modeli prognozy	
	Wariancja prognozy dokładnej jest większa od wariancji prognozy filtrowanej	
W przypadku, gdy szum nie jest uwzględniany dwa modele prognozy dają identyczne wartości prognozowane oraz wariancje prognozy		



Problem I



- » Jak porównać metody bez powielania wzorów?
- » Predykcja MNK (Least squares prediction) = Kriging prosty w wersji prognozy dokładnej ($\mu = 0$), np. w:
 - [1] strona 80, wzory 9.28, 9.29
 - [2] strona 361, wzory 9.64, 9.67, 9.72, 9.73
- » Kolokacja z szumem (Collocation with random errors) = Kriging prosty w wersji prognozy filtrowanej ($\mu = 0$), np. w:
 - [1] strona 102, 104, wzory 14.27, 14.42, 14.45

[1] Moritz H., (1980), Advanced Physical Geodesy, Wichmann

[2] Hofmann-Wellenhof B., Moritz H. (2005), Physical Geodesy, Springer

Kriging zwyczajny – prognoza dokładna

Układ równań:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Omega} & \mathbf{u} \\ \mathbf{u}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{Z} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon} = \mu \mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon} \\ Z_0 = \mu + \varepsilon_0 \end{cases}$$

Rozwiązanie w postaci jawnej:

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{I} - (\mathbf{u}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{u})^{-1} \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{u}^T] \mathbf{\Omega}^{-1} \omega_0 + (\mathbf{u}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{u})^{-1} \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{u} \\ (\mathbf{u}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{u})^{-1} \mathbf{u}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \omega_0 - (\mathbf{u}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{u})^{-1} \end{bmatrix}$$

Jawna postać predyktora:

$$\hat{Z}_0 = \lambda^T \mathbf{Z} = \hat{\mu} + \omega_0^T \mathbf{\Omega}^{-1} (\mathbf{Z} - \mathbf{u} \hat{\mu}) \quad \hat{\mu} = (\mathbf{u}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{u})^{-1} \mathbf{u}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{Z}$$

Wariancja prognozy:

$$\sigma_{OK}^2 = \sigma^2 - \lambda^T \omega_0 - \kappa = \sigma^2 - \omega_0^T \mathbf{\Omega}^{-1} \omega_0 + (1 - \omega_0^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{u})(\mathbf{u}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{u})^{-1} (1 - \omega_0^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{u})^T$$

Kriging zwyczajny – prognoza filtrowana

Układ równań:

$$\begin{bmatrix} \Omega_{ZZ} & \mathbf{u} \\ \mathbf{u}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{ss_0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{Z} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{s} + \boldsymbol{\epsilon} = \mu \mathbf{u} + \mathbf{s} + \boldsymbol{\epsilon} \\ S_0 = \mu + s_0 \end{cases}$$

Rozwiązanie w postaci jawnej:

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\mathbf{I} - (\mathbf{u}^T \Omega_{ZZ}^{-1} \mathbf{u})^{-1} \Omega_{ZZ}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{u}^T \right] \Omega_{ZZ}^{-1} \omega_{ss_0} + (\mathbf{u}^T \Omega_{ZZ}^{-1} \mathbf{u})^{-1} \Omega_{ZZ}^{-1} \mathbf{u} \\ (\mathbf{u}^T \Omega_{ZZ}^{-1} \mathbf{u})^{-1} \mathbf{u}^T \Omega_{ZZ}^{-1} \omega_{ss_0} - (\mathbf{u}^T \Omega_{ZZ}^{-1} \mathbf{u})^{-1} \end{bmatrix}$$

Jawna postać predyktora:

$$\hat{S}_0 = \lambda^T \mathbf{Z} = \hat{\mu} + \omega_{ss_0}^T \Omega_{ZZ}^{-1} (\mathbf{Z} - \mathbf{u} \hat{\mu}) \quad \hat{\mu} = (\mathbf{u}^T \Omega_{ZZ}^{-1} \mathbf{u})^{-1} \mathbf{u}^T \Omega_{ZZ}^{-1} \mathbf{Z}$$

Wariancja prognozy:

$$\sigma_{FOK}^2 = \sigma_s^2 - \lambda^T \omega_{ss_0} - \kappa = \sigma_s^2 - \omega_{ss_0}^T \Omega_{ZZ}^{-1} \omega_{ss_0} + (1 - \omega_{ss_0}^T \Omega_{ZZ}^{-1} \mathbf{u}) (\mathbf{u}^T \Omega_{ZZ}^{-1} \mathbf{u})^{-1} (1 - \omega_{ss_0}^T \Omega_{ZZ}^{-1} \mathbf{u})^T$$

Kriging uniwersalny – prognoza dokładna

Układ równań:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Omega} & \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_0 \\ \mathbf{x}_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{Z} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \\ Z_0 = \mathbf{x}_0^T \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_0 \end{cases}$$

Rozwiązanie w postaci jawnej:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{I} - \mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T]\mathbf{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_0 \\ (\mathbf{X}^T\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\omega}_0 - (\mathbf{X}^T\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_0 \end{bmatrix}$$

Jawna postać predyktora:

$$\hat{Z}_0 = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{Z} = \mathbf{x}_0^T \hat{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\omega}_0^T \mathbf{\Omega}^{-1} (\mathbf{Z} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \quad \hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{Z}$$

Wariancja prognozy:

$$\sigma_{UK}^2 = \sigma^2 - \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\omega}_0 - \mathbf{k}^T \mathbf{x}_0 = \sigma^2 - \boldsymbol{\omega}_0^T \mathbf{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\omega}_0 + (\mathbf{x}_0^T - \boldsymbol{\omega}_0^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{X})(\mathbf{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{x}_0^T - \boldsymbol{\omega}_0^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{X})^T$$

Kriging uniwersalny – prognoza filtrowana

Układ równań:

$$\begin{bmatrix} \Omega_{ZZ} & \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{ss_0} \\ \mathbf{x}_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{Z} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{s} + \boldsymbol{\epsilon} \\ S_0 = \mathbf{x}_0^T \boldsymbol{\beta} + s_0 \end{cases}$$

Rozwiązanie w postaci jawnej:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\mathbf{I} - \Omega_{ZZ}^{-1} \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \Omega_{ZZ}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \right] \Omega_{ZZ}^{-1} \boldsymbol{\omega}_{ss_0} + \Omega_{ZZ}^{-1} \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \Omega_{ZZ}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0 \\ (\mathbf{X}^T \Omega_{ZZ}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \Omega_{ZZ}^{-1} \boldsymbol{\omega}_{ss_0} - (\mathbf{X}^T \Omega_{ZZ}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0 \end{bmatrix}$$

Jawna postać predyktora:

$$\hat{S}_0 = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{Z} = \mathbf{x}_0^T \hat{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\omega}_{ss_0}^T \Omega_{ZZ}^{-1} (\mathbf{Z} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}) \quad \hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \Omega_{ZZ}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \Omega_{ZZ}^{-1} \mathbf{Z}$$

Wariancja prognozy:

$$\sigma_{FUK}^2 = \sigma_s^2 - \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\omega}_{ss_0} - \mathbf{x}_0^T \boldsymbol{\kappa} = \sigma_s^2 - \boldsymbol{\omega}_{ss_0}^T \Omega_{ZZ}^{-1} \boldsymbol{\omega}_{ss_0} + (\mathbf{x}_0^T - \boldsymbol{\omega}_{ss_0}^T \Omega_{ZZ}^{-1} \mathbf{X}) (\mathbf{X}^T \Omega_{ZZ}^{-1} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{x}_0^T - \boldsymbol{\omega}_{ss_0}^T \Omega_{ZZ}^{-1} \mathbf{X})^T$$

Problem II

- » Jak porównać metody bez powielania wzorów?
- » Kolokacja z parametrami (Collocation with parameters) = Kriging uniwersalny w wersji filtrowanej, np. w:
 - [1] strona 15, 38, 40, wzory 2.35, 2.36, 2.38, 3.56, 3.59 oraz przykład na stronie 48

[1] Moritz, H.: Advanced Least-Squares Methods. Reports of the Department of Geodetic Science No. 175, The Ohio State University, Columbus 1972.

<https://earthsciences.osu.edu/sites/earthsciences.osu.edu/files/report-175.pdf>

Różnice



To nie formuły matematyczne stanowią o różnicy między krigingiem i kolokacją (są równoważne) a różnica w opisywanych zjawiskach (ich specyfice):

- » W geodezji fizycznej, gdzie wszystkie wielkości są powiązane z potencjałem zakłócającym, upowszechniło się prawo propagacji kowariancji dla funkcjonatów.
- » W górnictwie i geologii, gdzie geostatystyka ma swoje początki, trudno byłoby znaleźć zależność funkcyjną między np. stężeniem ołowiu i cynku.
- » Kolokacja (u podstaw) dotyczyła problemów globalnych, więc od początku była opracowywana dla "kulistej" Ziemi.
- » Kriging początkowo dotyczył ograniczonych obszarów (dla celów górniczych), ale obecnie obie metody są stosowane w tym samym zakresie przestrzennym.
- » Prawdziwą różnicę (według mnie) stanowi to, iż te dwie metody rozwijały się w różnych środowiskach naukowych i zostały zaprojektowane do rozwiązywania różnych problemów.



Dziękuję za uwagę...