

Ćwiczenia 2

Tematy:

Zmienne losowe typu skokowego i ciągłego

rozkłady zmiennych, dystrybuanta, funkcja gęstości rozkładu ciągłego;

parametry zmiennych: wartość oczekiwana, wariancja i odchylenie standardowe.

Wybrane rozkłady.

zmienne typu skokowego: rozkład zerojedynkowy i rozkład dwumianowy;

zmienne typu ciągłego: rozkład jednostajny, rozkład normalny.

1. Zmienna losowa X ma następujący rozkład

x_i	-1	0	1	2
p_i	0.2	0.1	0.3	0.4

(a) Sprawdź poprawność rozkładu, a następnie wyznacz jego parametry: wartość oczekiwaną EX , wariancję $\text{Var}X$ i odchylenie standardowe σ_X .

(b) Wyznacz rozkłady zmiennych $Y = 2X - 1$, $Z = X^2$ oraz oblicz EZ . Dokonaj sprawdzenia tożsamości $\text{Var}X = E(X^2) - (EX)^2$.

2. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Jeśli suma oczek równa jest 2 to otrzymujemy 120 zł, jeśli suma oczek równa jest 3, to otrzymujemy 60 zł, a w każdym innym przypadku płacimy 10 zł. Niech zmienna losowa X oznacza wielkość wygranej.

(a) podać rozkład zmiennej X ;

(b) wyznaczyć dystrybuantę zmiennej X ;

(c) wyznaczyć wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe zmiennej X .

3. Według ostatnich badań 90% młodych ludzi w wieku od 21 do 25 lat mieszka z rodzicami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w losowej grupie 7. osób w tym wieku co najwyżej jedna będzie mieszkała samodzielnie?

4. Wykonujemy serię niezależnych pomiarów tego samego parametru. Prawdopodobieństwo popełnienia błędu grubego w pojedynczym pomiarze wynosi $p = 0.2$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że:

(a) na pięć wykonanych pomiarów ani jeden nie będzie obarczony błędem grubym;

(b) na cztery wykonane pomiary co najmniej jeden będzie obarczony błędem grubym.

5. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $[a, b]$. Pokazać z definicji wartości oczekiwanej i wariancji zmiennej o rozkładzie ciągłym, że odchylenie standardowe i wariancja X są dane wzorami $EX = (a + b)/2$ oraz $\text{Var}X = (b - a)^2/12$.

6. Zmienna losowa X przyjmuje wartości tylko z przedziału $< -1, 2 >$. Funkcja gęstości ma w tym przedziale postać $f(x) = cx^2$.

(a) Wyznaczyć wartość stałej c oraz ustalić postać dystrybucyjności $F(x)$.

(b) Obliczyć wartość oczekiwaną EX i odchylenie standardowe σ_X zmiennej X .

7. Dystrybucyjność zmiennej losowej X dana jest wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x < 10 ; \\ \frac{x-10}{10} & \text{gdy } 10 \leq x \leq 20 ; \\ 1 & \text{gdy } x > 20 . \end{cases}$$

Sprawdź poprawność dystrybucyjności, a następnie oblicz wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe zmiennej X .

8. Zmienna losowa X ma rozkład normalny standardowy $\mathcal{N}[0; 1]$. Wyznacz wartości następujących prawdopodobieństw:

(a) $P(X < 4)$; (b) $P(X \geq 1)$; (c) $P(0.5 \leq X < 2)$; (d) $P(X < -0.7)$;

(e) $P(|X| < 1)$; (f) $P(|X| \geq 1.5)$.

9. Zmienna losowa X ma rozkład normalny $\mathcal{N}[3; 2]$. Wyznacz wartości prawdopodobieństw:

(a) $P(X < 4)$; (b) $P(3.5 \leq X < 5)$.

10. Błąd pomiaru ε jest zmienną losową o rozkładzie $\mathcal{N}[0; 1.5]$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że spośród błędów 6. niezależnych pomiarów co najmniej 5 będzie miało wartość bezwzględną mniejszą od podwójnego odchylenia standardowego błędu.