

Ćwiczenia 3

Tematy:

Rozkłady zmiennych skalarnych

parametry rozkładu, rozkłady chi-kwadrat i t-Studenta.

Zmienne losowe dwuwymiarowe

rozkłady brzegowe i ich parametry;

kowariancja i współczynnik korelacji;

niezależność i korelacja zmiennych.

Rozkład wielowymiarowy

macierz kowariancji.

1. Zmienna losowa X ma dystrybuantę opisaną wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < -3; \\ a \left(\frac{1}{3}x^3 + 4x + b \right) & \text{dla } -3 \leq x \leq 6; \\ 1 & \text{dla } x > 6. \end{cases}$$

Wyznaczyć:

(a) wartość parametrów a i b ;

(b) wartość oczekiwaną EX i odchylenie standardowe σ_X zmiennej X ;

(c) prawdopodobieństwo $P(|X| < \sigma_X)$.

2. Zmienna losowa Y ma rozkład chi-kwadrat o $n = 3$ stopniach swobody, χ_3^2 . Wyznaczyć, wykorzystując tablice rozkładu chi-kwadrat, następujące prawdopodobieństwa:

(a) $P(Y > 6.25)$; (b) $P(Y < 7.81)$; (a) $P(1.00 < Y < 4.64)$.

3. Zmienna losowa X ma rozkład t-Studenta o $n = 5$ stopniach swobody, T_5 . Wyznaczyć, wykorzystując tablice rozkładu t-Studenta, dla jakich wartości x uzyskuje się następujące prawdopodobieństwa:

(a) $P(|X| > x) = 0.2$; (b) $P(|X| < x) = 0.6$.

4. Zmienna losowa (X, Y) ma następujący rozkład prawdopodobieństwa:

$X \downarrow / Y \rightarrow$	-1	0	2	
3	0.1	0.2	0.0	
4	0.3	0.0	0.4	

(a) Sprawdzić poprawność rozkładu, a następnie wyznaczyć rozkłady brzegowe zmiennych X i Y .

- (b) Na podstawie rozkładów brzegowych stwierdzić, czy zmienne X i Y są niezależne, a następnie wyznaczyć ich parametry: EX , EY , σ_X i σ_Y .
- (c) Wyznaczyć parametry łącznego rozkładu zmiennych, kowariancję $\text{Cov}(X, Y)$ i współczynnik korelacji $\rho(X, Y)$.
- (d) Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = X - 2Y$, a następnie na podstawie tego rozkładu parametry zmiennej Z : EZ i σ_Z .
- (e) Wyznaczyć parametry zmiennej Z alternatywną metodą, wykorzystując wzory na wartość oczekiwaną i wariancję kombinacji liniowej zmiennych losowych.

5. (ćwiczenie 1 z wykładu) Zmienna losowa X ma następujący rozkład:

X	-1	0	1
$P(X)$	1/3	1/3	1/3

Definiujemy zmienną losową $Y = X^2$, która jest oczywiście zależna od zmiennej X jako jej funkcja.

- (a) Wyznaczyć rozkład zmiennej Y oraz rozkład łączny pary zmiennych (X, Y) . Sprawdzić, czy rozkład łączny potwierdza zależność zmiennych X i Y .
- (b) Wyznaczyć parametry zmiennych EX , EY , σ_X , σ_Y oraz parametry rozkładu łącznego $\text{Cov}(X, Y)$ i $\rho(X, Y)$. Co można powiedzieć o zależności korelacyjnej zmiennych X, Y ?

6. W celu zbadania wpływu temperatury powietrza (t) na błędy pomiaru dalmierzem elektrooptycznym (ε), wykonano 100 pomiarów pewnej bazy testowej w różnych przedziałach temperatury, przy czym różnicę między wzorcową długością bazy a wynikiem pomiaru traktowano jako błąd pomiaru. Liczebność błędów w poszczególnych wyróżnionych zakresach wartości, uzyskiwanych w ustalonych przedziałach temperatury powietrza, zestawiono w tabeli:

ε (mm) $\downarrow$ / t ($^{\circ}\text{C}$) $\rightarrow$	(0; 6 >	(6; 12 >	(12; 18 >	
(-4; -2 >	5	0	5	
(-2; 0 >	5	5	0	
(0; 2 >	10	10	15	
(2; 4 >	15	10	20	
				100

Wyznaczyć współczynnik korelacji między temperaturą powietrza i błędem pomiaru dalmierzem elektrooptycznym i podać jego interpretację. Wskazówka: sporządzając tabelę rozkładu zmiennej losowej (t, ε) przyjąć wartości środkowe wyróżnionych przedziałów parametrów.

7. Współrzędne wektora losowego $\vec{X} = [X_1 \ X_2 \ X_3]^T$ mają odchylenia standardowe $\sigma_{X_1} = 2$, $\sigma_{X_2} = 3$, $\sigma_{X_3} = 1$ oraz współczynniki korelacji $\rho(X_1, X_2) = -0.5$, $\rho(X_1, X_3) = 0$, $\rho(X_3, X_2) = 1/3$. Wyznaczyć macierz kowariancji wektora $\vec{X}$, $C_{\vec{X}}$.

8. Czy macierz

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}$$

może być macierzą kowariancji wektora losowego wymiaru 2? Odpowiedź uzasadnić.