

Ćwiczenia 4

Tematy:

Rozkład wielowymiarowy

macierz kowariancji, macierz korelacji i macierz odchyłeń standardowych.

Propagacja macierzy kowariancji

przy przekształceniu liniowym wektora losowego;

przy przekształceniu nieliniowym wektora losowego.

-
1. Zmienna losowa Z jest następującą funkcją liniową pary zmiennych losowych (X_1, X_2) :
- $$Z = 2X_1 - 3X_2 + 5.$$

Dla zadanych parametrów łącznego rozkładu zmiennych X_1 i X_2 :

$$EX_1 = 3, \quad EX_2 = -2, \quad \sigma_{X_1} = 2, \quad \sigma_{X_2} = 3, \quad \varrho(X_1, X_2) = -0.8$$

- (a) oblicz wartość oczekiwaną zmiennej Z , EZ ;
- (b) oblicz wariancję zmiennej Z , $\text{Var}Z = \sigma_Z^2$, oraz odchylenie standardowe σ_Z ;
- (c) zapisz przekształcenie liniowe $(X_1, X_2) \rightarrow Z$ w postaci wektorowo-macierzowej $Z = Z_0 + A\vec{X}$, w której wektor $\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$, natomiast A jest macierzą o stałych współczynnikach ;
- (d) wyznacz macierz kowariancji $C_{\vec{X}}$ wektora losowego $\vec{X}$;
- (e) z równania propagacji macierzy kowariancji $C_{\vec{X}}$ wyznacz wariancję σ_Z^2 oraz odchylenie standardowe σ_Z , a następnie porównaj wyznaczone parametry z wynikami punktu (b) zadania;
- (f) powtórz obliczenia zaniedbując korelację zmiennych X_1, X_2 i porównaj wyniki.

2. Macierz kowariancji wektora losowego $\vec{X} = [X_1 \ X_2 \ X_3]^T$ dana jest wzorem

$$C_{\vec{X}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Jak wyglądają odpowiadające macierze korelacji $\varrho_{\vec{X}}$ oraz odchyłeń standardowych $\sigma_{\vec{X}}$ wektora $\vec{X}$?
- (b) Wyznacz odchylenie standardowe sumy współrzędnych wektora $\vec{X}$, czyli zmiennej $Z = X_1 + X_2 + X_3$.
- (c) Jaka byłaby wartość σ_Z przy założeniu, że współrzędne wektora $\vec{X}$ nie są skorelowane?

3. Wyznacz macierz kowariancji pary zmiennych Y_1 i Y_2 opisanych wzorem

$$\begin{aligned} Y_1 &= 2X_1 - X_2 + 3, \\ Y_2 &= X_1 + X_2 - 5, \end{aligned}$$

w którym X_1 i X_2 są zmiennymi losowymi o parametrach $\sigma_{X_1} = 2$, $\sigma_{X_2} = 3$ oraz $\varrho(X_1, X_2) = -0.5$. Podaj wartości odchyłeń standardowych zmiennych Y_1 i Y_2 oraz ich współczynnika korelacji.

4. Macierz kowariancji wektora losowego $\vec{X} = [X_1 \ X_2 \ X_3]^T$ o wartości oczekiwanej $E\vec{X} = [0.50 \ 0.25 \ 0.625]^T$ dana jest wzorem

$$C_{\vec{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Współrzędne wektora losowego $\vec{Y} = [Y_1 \ Y_2]^T$ są następującymi funkcjami współrzędnych wektora $\vec{X}$:

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1^2 - X_2 + 3, \\ Y_2 &= 4X_1^3 + 2X_2^2 - X_3 - 2. \end{aligned}$$

Wyznacz wartość oczekiwaną $E\vec{Y}$ i macierz kowariancji $C_{\vec{Y}}$ wektora $\vec{Y}$. Co można powiedzieć o statystycznej zależności zmiennych losowych Y_1 i Y_2 ?

5. Wyznacz macierz kowariancji pary zmiennych Y_1 i Y_2 opisanych wzorem

$$\begin{aligned} Y_1 &= \ln X_1 - X_2 - 3, \\ Y_2 &= \sqrt{X_2} + 2, \end{aligned}$$

w którym X_1 i X_2 są zmiennymi losowymi o wartościach oczekiwanych $EX_1 = 1/2$ i $EX_2 = 1/4$ oraz macierzy kowariancji

$$C_{\vec{X}} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wyznacz odchylenia standardowe i współczynnik korelacji zmiennych Y_1 i Y_2 .

6. Obserwacje kierunków K_1 , K_2 i K_3 są niezależnymi zmiennymi o odchyleniach standardowych, odpowiednio: $\sigma_1 = 2^\circ$, $\sigma_2 = 3^\circ$ oraz $\sigma_3 = 1^\circ$ (rysunek). Na podstawie pomiaru tych kierunków wyznaczamy kąty α i β . Oblicz odchylenia standardowe wyznaczonych kątów σ_α , σ_β oraz współczynnik korelacji $\varrho(\alpha, \beta)$.

